Ingegneria Civile. Compito di **Geometria** del 11/04/03

I

È assegnato l'endomorfismo $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ associato alla matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 2-h \\ 2 & h-2 & 2-h \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

con h parametro reale.
1) Studiare f al variare di h, determinando in ciascun caso $\mathrm{Im}f$ e $\mathrm{Ker}f$.
2) Verificare che f è semplice per ogni valore di h e determinare una base di autovettori indipendente dal parametro.
3) Determinare, al variare di h, la controimmagine di $(1,0,0)$, cioè il sottoinsieme

$$f^{-1}(1,0,0) = \{v \in \mathbf{R}^3 \mid f(v) = (1,0,0)\} \subseteq \mathbf{R}^3$$

4) Nel caso $h=2$ determinare l'endomorfismo inverso $f^{-1}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ e calcolare la matrice ad esso associata rispetto alla base canonica.

II

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u$.
1) Sono dati il piano $\alpha:\ x-y+z=0$ e la retta

$$\mathbf{r}: \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=1 \end{cases}$$

Determinare la generica retta $\mathbf{s}$ parallela ad $\mathbf{r}$ e tale che, detto $S = \alpha \cap \mathbf{s}$, sia $\overline{OS} = \sqrt{2}$. Determinare il luogo C descritto dalle rette $\mathbf{s}$ verificando che C è un cilindro. Trovare il vertice di C.
2) Studiare il fascio Φ di coniche del piano $z=0$ di equazione

$$x^2 + (h-1)y^2 + (2-h)y - 1 = 0$$

determinando in particolare i punti base e le coniche spezzate di Φ. Per l'unica parabola di Φ determinare il vertice, il fuoco, la direttrice e l'asse di simmetria.
3) Determinare il cono che ha per direttrice la circonferenza di Φ ed ha vertice $V \equiv (0,0,2)$.

SVOLGIMENTO

I

1) Per valutare il rango della matrice $M(f)$ ne calcoliamo il determinante

$$|M(f)| = 4h - 2h^2 - 8 + 4h + 2(h-2)^2 - 4h = -2h^2 + 4h - 8 + 2h^2 - 8h + 8 = -4h$$

quindi dobbiamo considerare due casi
$h \neq 0$ $\quad f$ è un isomorfismo;
$h = 0$ $\quad$ la matrice diviene

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}f = \mathcal{L}\left((0,1,1),(1,0,0)\right)$$

mentre per calcolare il nucleo dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}f = \{(x, x, 0)\}$$

2) Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\begin{vmatrix} -T & h & 2-h \\ 2 & h-2-T & 2-h \\ 2 & -2 & 2-T \end{vmatrix} =$$

$$= -T(h-2-T)(2-T) + 8h - 2h^2 - 8 - 2(2-h)(h-2-T) - 2(2-h)T - 2h(2-T) =$$
$$= -T(h-2-T)(2-T) + (4 - 2h - 4 + 2h + 2h)T + 8h - 2h^2 - 8 + 8 - 8h + 2h^2 =$$
$$= -T(h-2-T)(2-T) - 2h(2-T) = (2-T)(T^2 - (h-2)T - 2h = 0$$
$$T = 2,\ T = -2,\ T = h$$

Se $T \neq \pm 2$ f ha tre autovalori distinti, quindi è semplice. In questo caso calcoliamo gli autospazi.
$T = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & h & 2-h \\ 2 & h-4 & 2-h \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (h-2)x + (2-h)z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \{(x, x, x)\}$$

con base $u_1 = (1, 1, 1)$;
$T = -2$

$$\begin{pmatrix} 2 & h & 2-h \\ 2 & h & 2-h \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 2 & h & 2-h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-h & 2+h \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

quindi $V_{-2} = \{(-z, z, z)\}$ con base $u_2 = (-1, 1, 1)$;
$T = h$

$$\begin{pmatrix} -h & h & 2-h \\ 2 & -2 & 2-h \\ 2 & -2 & 2-h \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} -h & h & 2-h \\ 2+h & -2-h & 0 \\ 2+h & -2-h & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

quindi $V_h = \{(x, x, 0)\}$ con base $u_3 = (1, 1, 0)$.

Poiché la base di autovettori che abbiamo trovato non dipende dal parametro, essa rimane tale anche nei casi particolari $h = \pm 2$. Quindi f risulta semplice per ogni h.
3) Dobbiamo risolvere il sistema lineare associato alla matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & h & 2-h & 1 \\ 2 & h-2 & 2-h & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & h & 2-h & 1 \\ 0 & h & -h & 0 \end{array}\right) \overset{h\neq 0}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & h & 2-h & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

quindi nel caso $h \neq 0$ si ha $f^{-1}(1, 0, 0) = \{(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Se $h = 0$ dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2z = 1 \\ 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(1, 0, 0) = \left\{\left(y - \frac{1}{2}, y, \frac{1}{2}\right)\right\}$$

4) Determiniamo la matrice associata all'endomorfismo inverso per $h=2$, $M(f^{-1}) = (M(f))^{-1}$:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M(f^{-1}) = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

II

1) Intersecando col piano α la generica retta parallela ad $\mathbf{r}$ si ha

$$\mathbf{r}: \begin{cases} x-y=h \\ y-z=k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S: \begin{cases} x=y+h \\ z=y-k \\ x-y+z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S \equiv (k, k-h, -h)$$

quindi

$$\overline{OS} = \sqrt{k^2+(k-h)^2+h^2} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad h^2-hk+k^2=1$$

Da questa relazione, eliminando i parametri h e k che si ricavano dalle equazioni di $\mathbf{s}$, si ottiene l'equazione del luogo

$$C: \ x^2-xy+y^2-xz-yz+z^2=1$$

Per verificare che questa quadrica è un cilindro consideriamo la sua matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 3. Quindi C può essere un cono oppure un cilindro. Troviamo il vertice di C risolvendo il sistema omogeneo associato a C:

$$\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x-2y-z=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=z \\ x=z \\ t=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V \equiv (1,1,1,0)$$

Pertanto C è un cilindro.
2) La matrice associata alla generica conica di Φ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & \frac{2-h}{2} \\ 0 & \frac{2-h}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |B| = 1-h-\frac{(2-h)^2}{4} = -\frac{h^2}{4} = 0 \text{ per } \ h=0 \ \text{ (radice doppia)}$$

quindi si hanno le coniche spezzate:
$h=0 \quad x^2-(y-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad (x+y-1)(x-y+1)=0$;
$h=\infty \quad y^2-y=0 \quad \Rightarrow \quad y(y-1)=0$.
I punti base si trovano secando le rette in cui si spezzano queste coniche

$$\begin{cases} y=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} (1,0); \quad \begin{cases} y=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} (-1,0);$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x+y-1=0 \end{cases} (0,1); \quad \begin{cases} y=1 \\ x-y+1=0 \end{cases} (0,1)$$

Per studiare le coniche irriducibili di Φ calcoliamo $|A| = h-1$. Quindi si ha:
$h>1$ Ellissi. Per $h=2$ si ha la circonferenza $x^2+y^2-1=0$;

$h < 1$ Iperboli. Non si hanno iperboli equilatere;
$h = 1$ Parabola di equazione $x^2 + y - 1 = 0$.

Osserviamo che la parabola si può scrivere nella forma

$$y = -x^2 + 1$$

quindi si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse $\vec{y}$ e concavità rivolta verso il basso. Pertanto, usando le ben note formule si trova:

$$V \equiv (0,1), \quad F \equiv (0, \frac{3}{4}), \quad \text{asse: } x = 0, \quad \text{direttrice: } y = \frac{5}{4}$$

3) La generica retta $\mathbf{t}$ passante per $V \equiv (0,0,2)$ seca il piano $z = 0$ che contiene la circonferenza nel punto P:

$$\mathbf{t}: \begin{cases} x = m(z-2) \\ y = n(z-2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = m(z-2) \\ y = n(z-2) \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P \equiv (-2m, -2n, 0)$$

ed imponendo che P appartenga alla circonferenza si trova la condizione $4m^2 + 4n^2 - 1 = 0$. Eliminando i parametri m ed n si ottiene l'equazione del cono:

$$4x^2 + 4y^2 - (z-2)^2 = 0$$