Ingegneria Civile. Compito di **Geometria** del 19/12/02

I

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ associato alla matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 2h-1 & 1-h & 2h-2 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$$

con h parametro reale.
1) Studiare f al variare di h determinando in ciascun caso Imf e Ker$f$.
2) Determinare i valori di h per cui $(0, 2, -3) \in$Imf. Nel caso $h = 0$ determinare il sottoinsieme

$$f^{-1}(0, 2, -3) = \{v \in \mathbf{R}^3 \mid f(v) = (0, 2, -3)\}$$

3) Verificare che f è semplice per ogni valore di h e determinare una base di autovettori indipendente dal parametro h.
4) Verificare che per ogni valore di h risulta Im$f \oplus$ Ker$f = \mathbf{R}^3$.

II

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$
1) Determinare la generica retta $\mathbf{r}$ parallela all'asse $\vec{z}$ ed avente distanza 1 dall'origine. Determinare la quadrica C luogo delle rette $\mathbf{r}$, verificando che si tratta di un cilindro. Determinare il suo vertice.
2) Studiare il fascio Φ di coniche del piano $z = 0$ di equazione

$$\Phi : \ (\lambda + 1)x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda y = 0$$

determinandone in particolare i punti base e le coniche spezzate.

Dopo avere verificato che Φ contiene una sola parabola $\mathbf{p}$, trovarne asse, vertice, fuoco.
3) Determinare il cono che ha $\mathbf{p}$ come direttrice e vertice $(0, 0, 1)$.

SVOLGIMENTO

I

1) Per studiare l'endomorfismo valutiamo il rango di $M(f)$:

$$|M(f)| = -h(h-1)^2 = 0 \qquad \begin{matrix} h = 0 \\ h = 1 \end{matrix}$$

quindi f è un isomorfismo per $h \neq 0, 1$. Discutiamo i casi particolari.
$h = 0$ La matrice diventa

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Im}f = \mathcal{L}\left((0, 1, 0,), (0, 0, 1)\right)$$

mentre per calcolare il nucleo risolviamo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Ker}f = \{(x, x, 0)\} \text{ con base } (1, 1, 0)$$

$h = 1$ La matrice diventa

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Im}f = \mathcal{L}\left((1,1,0,)\right)$$

mentre per calcolare il nucleo risolviamo il sistema lineare omogeneo

$$\{\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Ker}f = \{(0,y,z)\} \text{ con base } (0,1,0),\ (0,0,1)$$

2) Se $h \neq 0, 1$ f è un isomorfismo, quindi è suriettivo e $(0,2,-3) \in$Imf. Nel caso $h = 1$ Imf ha dimensione 1 e si vede subito che $(0,2,-3) \notin$Imf. L'asserto è vero per $h = 0$; in questo caso dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x + y - 2z = 2 \\ -z = -3 \end{cases}$$

quindi $f^{-1}(0,2,-3) = \{(x, x+8, 3)\}$.
3) Calcoliamo il polinomio caratteristico di f:

$$\begin{vmatrix} h-T & 0 & 0 \\ 2h-1 & 1-h-T & 2h-2 \\ 0 & 0 & h-1-T \end{vmatrix} = (h-T)(1-h-T)(h-1-T) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} T = h \\ T = 1-h \\ T = h-1 \end{matrix}$$

Se $h \neq 1, \frac{1}{2}$ i tre autovalori sono distinti, quindi f risulta semplice. In questo caso calcoliamo gli autospazi.
$T = h$ Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2h-1 & 1-2h & 2h-2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_h = \{(x,x,0)\} \text{ base } u_1 = (1,1,0)$$

$T = 1-h$ Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2h-1 & 0 & 0 \\ 2h-1 & 0 & 2h-2 \\ 0 & 0 & 2h-2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_{1-h} = \{(0,y,0)\} \text{ base } u_2 = (0,1,0)$$

$T = h-1$ Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2h-1 & 2-2h & 2h-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_{h-1} = \{(0,y,y)\} \text{ base } u_3 = (0,1,1)$$

Poiché la base trovata non dipende dal parametro h, l'endomorfismo risulta semplice anche nei casi particolari.
4) La verifica è immediata. Se $h \neq 0, 1$ Ker$f = \{0\}$ ed Im$f = \mathbf{R}^3$; nei casi $h = 0$ e $h = 1$ le basi di Imf e di Ker$f$ formano una base di $\mathbf{R}^3$.

II

1) La generica retta parallela all'asse $\vec{z}$ ha equazioni

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x = h \\ y = k \end{cases}$$

e secandola col piano passante per O ed ortogonale ad $\mathbf{r}$ (che ha equazione $z = 0$) si trova il punto $P \equiv (h, k, 0)$. Naturalmente $d(O, \mathbf{r}) = d(OP)$, quindi avremo

$$h^2 + k^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

e riconosciamo subito che si tratta di un cilindro ellittico con vertice nel punto Z_∞.
2) Scriviamo la matrice associata al fascio

$$B = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 & -1-\lambda \\ 0 & 1 & \frac{\lambda}{2} \\ -1-\lambda & \frac{\lambda}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |B| = -(\lambda+1)^2 - (\lambda+1)\frac{\lambda^2}{4} = -\frac{1}{4}(\lambda+1)(\lambda+2)^2$$

quindi si hanno le seguenti coniche spezzate
$\lambda = -1 \quad y(y-1) = 0$
$\lambda = -2 \quad (x-y)(x+y-2) = 0$;
secando queste due coniche spezzate si trovano subito i punti base $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ due volte. Osserviamo che per $\lambda = \infty$ si trova la parabola $x^2 - 2x + y = 0$. Per caratterizzare le coniche irriducibili di Φ calcolando il determinante della sottomatrice A : $|A| = 1 + \lambda$, si ha
$|A| > 0 \quad \lambda > -1$ ellissi. Per $\lambda = 0$ si ha la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$;
$|A| < 0 \quad \lambda < -1$ iperboli. Non ci sono iperboli equilatere;
$|A| = 0 \quad \lambda = -1$ spezzata.

Abbiamo già visto che la parabola di Φ ha equazione $y = -x^2 + 2x$; poiché si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse $\vec{y}$, possiamo determinare facilmente quanto richiesto:

$$\text{vertice: } V \equiv (1, 1), \quad \text{fuoco: } F \equiv (1, \frac{3}{4}), \quad \text{asse: } x - 1 = 0$$

3) La parabola $\mathbf{p}$ e la retta generica $\mathbf{s}$ per $(0, 0, 1)$ hanno equazioni

$$\mathbf{p} : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 - 2x + y = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{s} : \begin{cases} x = m(z-1) \\ y = n(z-1) \end{cases}$$

Secando $\mathbf{s}$ col piano $z = 0$ si trova il punto $(-m, -n, 0)$ ed imponendo che questo punto appartenga a $\mathbf{p}$ si trova la condizione

$$m^2 + 2m - n = 0$$

Ricavando m ed n dalle equazioni di $\mathbf{s}$ ($m = \frac{x}{z-1}$, $n = \frac{y}{z-1}$) si trova l'equazione del cono:

$$x^2 + 2x(z-1) - y(z-1) = 0$$