

I

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ mediante le uguaglianze

$$\begin{aligned} f(1, 1, 0) &= (2, 2, 0) \\ f(3, 2, 0) &= (4, 3, 0) \\ f(2, 2, 1) &= (h + 2, h + 2, h) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

- 1) Studiare l'endomorfismo f al variare di h determinando in ciascun caso $\text{Im} f$ e $\text{Ker} f$.
- 2) Verificare che f è semplice per ogni valore di h e determinare una base di autovettori indipendente dal parametro.
- 3) Determinare, al variare di h , la controimmagine di $(1, 1, 0)$, cioè il sottoinsieme

$$f^{-1}(1, 1, 0) = \{v \in \mathbf{R}^3 \mid f(v) = (1, 1, 0)\}$$

- 4) Nel caso $h = 2$ determinare l'applicazione $f^{-1} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, inversa di f .

II

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart. ort. $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

- 1) Sono dati il punto $A \equiv (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$ e le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \mathbf{s} : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare la retta $\mathbf{t}$ passante per A ed incidente ad $\mathbf{r}$ e ad $\mathbf{s}$. Detti $R = \mathbf{t} \cap \mathbf{r}$, $S = \mathbf{t} \cap \mathbf{s}$ verificare che $\overline{RS} = d(\mathbf{r}, \mathbf{s})$.

- 2) Studiare il fascio Φ di coniche del piano $z = 0$ che ha i punti base O , $A \equiv (2, 0)$, $B \equiv (3, 1)$ $C \equiv (1, 1)$. Per l'iperbole equilatera Γ di Φ determinare una equazione canonica, centro, assi di simmetria ed asintoti.
- 3) Determinare il cono che contiene Γ ed ha vertice $V \equiv (1, 1, 1)$.

SVOLGIMENTO

I

- 1) Per determinare la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica risolviamo il seguente sistema lineare dedotto dalle relazioni date

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) = (2, 2, 0) \\ 3f(e_1) + 2f(e_2) = (4, 3, 0) \\ 2f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) = (h + 2, h + 2, h) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (0, -1, 0) \\ f(e_2) = (2, 3, 0) \\ f(e_3) = (h - 2, h - 2, h) \end{cases}$$

quindi

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & h - 2 \\ -1 & 3 & h - 2 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \Rightarrow |M(f)| = 2h$$

e si hanno due casi

$h \neq 0$ f è un isomorfismo.

$h = 0$ $M(f)$ ha rango 2, quindi $\text{Im} f = \mathcal{L}(1, 0, 0), (0, 1, 0)$; per trovare il nucleo risolviamo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \text{Ker} f = \{(x, x, x)\}$$

2) Il polinomio caratteristico è

$$\begin{vmatrix} -T & 2 & h-2 \\ -1 & 3-T & h-2 \\ 0 & 0 & h-t \end{vmatrix} = (h-T)(T^2 - 3T + 2) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} T = h \\ T = 1 \\ T = 2 \end{matrix}$$

Se $h \neq 1, 2$ f risulta semplice perché ha tre autovalori distinti. In questo caso cerchiamo gli autospazi.

$T = h$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} -h & 2 & h-2 \\ -1 & 3-h & h-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (h-1)x - (h-1)y = 0 \\ (2-h)y - (2-h)z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_h = \{(x, x, x)\}$$

con base $u_1 = (1, 1, 1)$.

$T = 1$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & h-2 \\ -1 & 2 & h-2 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \{(2y, y, 0)\} \text{ con base } u_2 = (2, 1, 0).$$

$T = 2$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & h-2 \\ -1 & 1 & h-2 \\ 0 & 0 & h-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \{(x, x, 0)\} \text{ con base } u_3 = (1, 1, 0).$$

Poiché gli autovettori u_1, u_2, u_3 non dipendono da h , essi formano una base anche nei casi particolari $h = 1, h = 2$. Quindi f risulta semplice.

3) Siccome $(1, 1, 0) \in V_2$, avremo $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = (1, 1, 0)$, quindi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \in f^{-1}(1, 1, 0)$. In questo caso avremo

$$f^{-1}(1, 1, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) + \text{Ker} f$$

ed in particolare

$$h \neq 0 \quad f^{-1}(1, 1, 0) = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)\} \text{ perché } \text{Ker} f = \{0\};$$

$$h = 0 \quad f^{-1}(1, 1, 0) = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) + (x, x, x)\} = \{(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + x, x)\}.$$

Naturalmente lo stesso risultato si può ottenere risolvendo, al variare di h , il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & h-2 \\ -1 & 3 & h-2 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) Per $h = 2$ la matrice diventa

$$A = M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

In questo caso f è invertibile e la matrice associata ad f^{-1} rispetto alla base canonica è A^{-1} ; con facili calcoli si trova

$$M(f^{-1}) = A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t A_a = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

II

1) Consideriamo la retta generica passante per A

$$\begin{cases} x - \frac{4}{3} = mz \\ y + \frac{2}{3} = nz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} + mz \\ y = -\frac{2}{3} + nz \end{cases}$$

ed intersechiamola ordinatamente con $\mathbf{r}$ e con $\mathbf{s}$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} + mz \\ y = -\frac{2}{3} + nz \\ mz - nz + 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow m - n + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} + mz \\ y = -\frac{2}{3} + nz \\ nz - \frac{2}{3} + z = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow 2m + n + 1 = 0$$

Richiedendo che entrambe le condizioni siano verificate si ottiene $m = -1$, $n = 1$; quindi la retta cercata ha equazioni

$$\mathbf{t} \begin{cases} x - \frac{4}{3} = -z \\ y + \frac{2}{3} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3z = 4 \\ 3y - 3z = -2 \end{cases}$$

Osserviamo che la retta $\mathbf{t}$ ha punto improprio $T_\infty \equiv (1, -1, -1, 0)$ mentre le rette date hanno punti impropri $R_\infty \equiv (1, 1, 0, 0)$, $S_\infty \equiv (0, 1, -1, 0)$; quindi $\mathbf{t}$ risulta essere la retta ortogonale ed incidente sia ad $\mathbf{r}$ che ad $\mathbf{s}$. Pertanto la distanza tra $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ è la distanza tra R ed S .

2) Per scrivere l'equazione di Φ useremo due coniche spezzate passanti per i punti base. Le coniche spezzate di Φ sono $OA \cup BC : y(y-1) = 0$, $AB \cup OC : (x-y)(x-y-2) = 0$, $OB \cup AC : (x-3y)(x+y-2) = 0$; per scrivere l'equazione del fascio usiamo le prime due

$$\Phi : (x-y)(x-y-2) + hy(y-1) = 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + (h+1)y^2 - 2x + (2-h)y = 0$$

Dalla matrice associata otteniamo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & h+1 & \frac{2-h}{2} \\ -1 & \frac{2-h}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = -\frac{1}{4}h(5h+8), |A| = h$$

quindi le coniche spezzate del fascio (che conosciamo) si trovano per $h = 0$, $h = \infty$, $h = -8/5$. Per le coniche irriducibili si ha:

$h > 0$ ellissi. Non ci sono circonferenze;

$h < 0$ iperboli. Per $h = -2$ si trova l'iperbole equilatera Γ di equazione

$$\Gamma : x^2 - 2xy - y^2 - 2x + 4y = 0$$

Nel fascio non ci sono parabole.

Usando gli autovalori di A e gli invarianti ortogonali calcoliamo un'equazione canonica di Γ :

$$\begin{vmatrix} 1-T & -1 \\ -1 & -1-T \end{vmatrix} \Rightarrow T = \pm\sqrt{2}, \quad \gamma = -\frac{|B|}{|A|} = \frac{1}{2}$$

quindi l'equazione ridotta e l'equazione canonica sono

$$\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{\sqrt{2}}{4}} - \frac{y^2}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 1$$

Il centro di simmetria C si trova risolvendo il sistema lineare associato alle prime due righe della matrice B :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow C \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Gli asintoti si trovano congiungendo C coi punti impropri di Γ , di coordinate $(1, -1 \pm \sqrt{2}, 0)$, quindi sono le rette di equazioni $y - \frac{1}{2} = (-1 \pm \sqrt{2})(x - \frac{3}{2})$. Gli assi di simmetria sono le rette che passano per C ed hanno le direzioni degli autovettori della matrice A . Detti autovettori sono $(1, 1 - \sqrt{2})$ e $(1, 1 + \sqrt{2})$, quindi gli assi hanno equazioni

$$(1 \pm \sqrt{2})(x - \frac{1}{2}) - (y - \frac{3}{2}) = 0$$

3) La conica Γ e la retta generica l passante per V hanno equazioni

$$\Gamma: \begin{cases} z = 0 \\ x^2 - 2xy - y^2 - 2x + 4y = 0 \end{cases} \quad l: \begin{cases} x - 1 = m(z - 1) \\ y - 1 = n(z - 1) \end{cases} = 0$$

e secondo l col piano $z = 0$ si trova il punto $P \equiv (1 - m, 1 - n, 0)$. Imponendo che $P \in \Gamma$ si trova la condizione

$$(1 - m)^2 - 2(1 - m)(1 - n) - (1 - n)^2 - 2(1 - m) + 4(1 - n) = 0$$

dalla quale, sostituendo i valori dei parametri ricavati dalle equazioni di l ,

$$m = \frac{x - 1}{z - 1}, \quad n = \frac{y - 1}{z - 1}$$

si trova l'equazione del cono

$$(z - x)^2 - 2(z - x)(z - y) - (z - y)^2 - 2(z - x)(z - 1) + 4(z - y)(z - 1) = 0$$