

I

Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tale che

$$\begin{aligned} f(1, 1, 0) &= (h, 1, 1) \\ f(0, 1, 1) &= (2, h+1, h+1) \\ (1, 1, 1) &\in \text{Ker } f \end{aligned}$$

con h parametro reale.

- 1) Studiare l'endomorfismo f al variare di h determinando in ciascun caso $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$.
- 2) Verificare che nel caso $h = 1$ risulta $f \circ f = 0$ (= endomorfismo nullo). È vera la stessa proprietà nel caso $h = -2$?
- 3) Discutere la semplicità di f al variare di h . Determinare una base di autovettori nell'unico caso in cui ciò è possibile .
- 4) Determinare i valori di h per cui $(1, 1, 1) \in \text{Im } f$. Nel caso $h = 1$ determinare

$$f^{-1}(1, 1, 1) = \{v \in \mathbf{R}^3 \mid f(v) = (1, 1, 1)\}$$

II

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$

- 1) Sono date le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \mathbf{s} : \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Determinare la retta $\mathbf{t}$ ortogonale ed incidente ad $\mathbf{r}$ e ad $\mathbf{s}$. Determinare i punti $R = \mathbf{r} \cap \mathbf{t}$, $S = \mathbf{s} \cap \mathbf{t}$ e la distanza tra $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$.

- 2) Determinare e studiare il fascio Φ delle coniche del piano $z = 0$ che passano per i punti $A \equiv (0, 1)$, $B \equiv (0, -1)$, $C \equiv (-1, 0)$ e sono tangenti in C alla retta $x + 1 = 0$. Trovare il centro di simmetria, gli assi di simmetria ed i vertici della generica ellisse di Φ . Nel caso in cui il centro di simmetria è l'origine calcolare l'area del quadrilatero determinato dai vertici.

SVOLGIMENTO

I

- 1) Per studiare l'endomorfismo determiniamo la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) = (h, 1, 1) \\ f(e_2) + f(e_3) = (2, h+1, h+1) \\ f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (0, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow M(f) = \begin{pmatrix} -2 & h+2 & -h \\ -h-1 & h+2 & -1 \\ -h-1 & h+2 & -1 \end{pmatrix}$$

Naturalmente questa matrice non ha rango massimo perché il nucleo di f non è nullo. Supponiamo $h \neq -2$ e riduciamo $M(f)$

$$\begin{pmatrix} -2 & h+2 & -h \\ -h-1 & h+2 & -1 \\ -h-1 & h+2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & h+2 & -h \\ 1-h & 0 & h-1 \\ 1-h & 0 & h-1 \end{pmatrix}$$

vediamo che il rango è 2 per $h \neq 1$. Quindi abbiamo i seguenti casi
 $h \neq 1, -2 \quad \text{Im } f = \mathcal{L}((h, 1, 1), (2, h+1, h+1)), \text{Ker } f = \mathcal{L}(1, 1, 1).$

$h = 1$ $\dim \operatorname{Im} f = 1$, $\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(1, 1, 1)$, $\operatorname{Ker} f = \{(x, y, -2x + 3y)\} = \mathcal{L}((1, 0, -2), (0, 1, 3))$.
 $h = -2$ La matrice diventa

$$M(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

quindi $\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(-2, 1, 1)$, $\operatorname{Ker} f = \{(x, y, x)\} = \mathcal{L}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$.

2) Dopo aver posto $h = 1$ basta verificare che $M(f)^2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nel caso $h = -2$ ripetiamo lo stesso calcolo:

$$M(f)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -3M(f)$$

3) Calcoliamo il polinomio caratteristico di f :

$$\begin{vmatrix} -2 - T & h + 2 & -h \\ -h - 1 & h + 2 - T & -1 \\ -h - 1 & h + 2 & -1 - T \end{vmatrix} = (T + 1)(T + 2)(h + 2 - T) + (h + 1)(h + 2) + h(h + 1)(h + 2)$$

$$-h(h + 1)(h + 2 - T) - (h + 2)(T + 2) - (h + 1)(h + 2)(T + 1) = -T^3 + (h - 1)T^2$$

Osserviamo che per $h = 1$ il polinomio caratteristico ha la radice $T = 0$ tripla, mentre l'autospazio associato $V_0 = \operatorname{Ker} f$ ha dimensione 2; quindi f non è semplice. Supponendo $h \neq 1$ si trovano le radici $T = 0$ doppia e $T = h - 1$. Naturalmente dobbiamo controllare se $\dim V_0 = 2$; siccome $V_0 = \operatorname{Ker} f$, sappiamo già che il nucleo ha dimensione 2 solo per $h = -2$. Quindi f è semplice solo per $h = -2$. In questo caso troviamo una base di autovettori:

$T = 0$ $V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathcal{L}(u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 0))$;

$T = -3$ Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{-3} = \{(-2z, z, z)\} \text{ con base } u_3 = (-2, 1, 1)$$

4) Affinché $(1, 1, 1) \in \operatorname{Im} f$ dobbiamo richiedere che il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} -2 & h + 2 & -h \\ -h - 1 & h + 2 & -1 \\ -h - 1 & h + 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ammetta soluzioni. Consideriamo la matrice completa del sistema e riduciamola supponendo $h \neq -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & h + 2 & -h & 1 \\ -h - 1 & h + 2 & -1 & 1 \\ -h - 1 & h + 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & h + 2 & -h & 1 \\ 1 - h & 0 & h - 1 & 0 \\ 1 - h & 0 & h - 1 & 0 \end{array} \right)$$

quindi per $h \neq -2$, 1 avremo $\rho(A) = \rho(A, B) = 2$, pertanto il sistema ammette ∞^1 soluzioni; con facili conti si trova $f^{-1}(1, 1, 1) = \{(x, x + \frac{1}{h+2}, x)\}$.

Se $h = 1$ si ha $\rho(A) = \rho(A, B) = 1$, pertanto il sistema ammette ∞^2 soluzioni; anche in questo caso con facili conti si trova $f^{-1}(1, 1, 1) = \{(x, y, -2x + 3y - 1)\}$.

Infine, per $h = -2$ la matrice completa del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \rho(A) = 1, \rho(A, B) = 2$$

ed il sistema risulta impossibile.

II

1) Le rette assegnate sono sghembe ed hanno punti impropri rispettivamente $R_\infty \equiv (0, 1, 1, 0)$, $S_\infty \equiv (1, 0, 1, 0)$. Cerchiamo il piano π che contiene la retta $\mathbf{r}$ ed è parallelo ad $\mathbf{s}$: nel fascio $\varphi_r: x + hy - hz - 1 = 0$ imponendo il passaggio per S_∞ si trova $h = 1$, quindi π ha equazione $x + y - z - 1 = 0$. Detto $H \equiv (\alpha, 0, \alpha)$ il punto generico di $\mathbf{s}$ consideriamo la retta $\mathbf{t}$ che passa per H ed è ortogonale a π ; imponendo a questa retta di essere incidente con $\mathbf{r}$ si trova la retta cercata.

$$\mathbf{t}: x - \alpha = y = -(z - \alpha) \Rightarrow \begin{cases} y = x - \alpha \\ z = -x + 2\alpha \end{cases}$$

$$\mathbf{r} \cap \mathbf{t} \neq \emptyset \Rightarrow \begin{cases} y = x - \alpha \\ z = -x + 2\alpha \\ x = 1 \\ x - \alpha = -x + 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

quindi si ha:

$$\mathbf{t}: \begin{cases} x - y = \frac{2}{3} \\ x + z = \frac{4}{3} \end{cases}; \quad R \equiv \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad S \equiv \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right); \quad d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \overline{RS} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2) Per determinare l'equazione del fascio possiamo usare le due coniche spezzate: quella spezzata nella tangente in C e nella retta AB ; quella spezzata nelle rette AC e BC . Quindi il fascio ha equazione

$$\Phi: (x - y + 1)(x + y + 1) + hx(x + 1) = 0 \Rightarrow \Phi: (h + 1)x^2 - y^2 + (h + 2)x + 1 = 0$$

Naturalmente conosciamo già i punti base e le coniche spezzate del fascio: esse sono quelle che abbiamo usato per generarlo e si ottengono per $h = 0$ e per $h = \infty$. Consideriamo la matrice del fascio

$$B = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & \frac{h+2}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{h+2}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -h - 1$$

quindi si ha

$|A| > 0$ per $h < -1$ ellissi. Per $h = -2$ si ha la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$;
 $|A| < 0$ per $h > -1$ iperboli. Non ci sono iperboli equilateri;
 $|A| = 0$ per $h = -1$ parabola $y^2 - x - 1 = 0$.

Supponiamo $h < -1$. Per trovare il centro di simmetria K risolviamo il sistema lineare associato alle prime due righe di B :

$$\begin{cases} (h+1)x = -\frac{h+2}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow K \equiv \left(-\frac{h+2}{2(h+1)}, 0\right)$$

Siccome nell'equazione di Φ manca il termine misto in xy , gli assi di simmetria sono paralleli agli assi coordinati; pertanto essi hanno equazioni $y = 0$, $x = -\frac{h+2}{2(h+1)}$. Per determinare i vertici sechiamo la generica conica del fascio con gli assi di simmetria

$$\begin{cases} y = 0 \\ (h+1)x^2 + (h+2)x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-h-2 \pm h}{2(h+1)} = \frac{-1}{h+1} \quad \begin{matrix} V_1 = C \\ V_2 \equiv (\frac{-1}{h+1}, 0) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{h+2}{2(h+1)} \\ y^2 = \frac{-h^2}{4(h+1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} V_3 \equiv \left(-\frac{h+2}{2(h+1)}, \frac{-h}{2\sqrt{-1-h}}\right) \\ V_4 \equiv \left(-\frac{h+2}{2(h+1)}, \frac{h}{2\sqrt{-1-h}}\right) \end{matrix}$$

Il centro di simmetria coincide con l'origine per $h = -2$. In questo caso il quadrilatero determinato dai vertici è un quadrato di lato $\sqrt{2}$, quindi la sua area è 2.