FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegenria Edile-Architettura

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 1/03/04

COMPITO A

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare avente

- $v_1 = (1, 0, 1)$ come autovettore associato all'autovalore $T = h$;
- $v_2 = (1, 1, -1)$ come autovettore associato all'autovalore $T = 2 - h$;
- $v_3 = (1, 1, 1)$ come un elemento del $Ker(f)$.

1. Studiare tale applicazione determinando, al variare di h, una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
2. Studiare la semplicità di f, al variare di h.
3. Determinare, al variare di h, il sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^3$, tale che $f(V) \subseteq W$, dove $W = \{(y_1, y_2, y_3)|\ y_1 + y_3 = 0\}$.

Risoluzione

In base ai dati, per definizine si ha che:

$$f(v_1) = hv_1; \quad f(v_2) = (2 - h)v_2; \quad f(v_3) = \underline{0}$$

1. L'applicazine f è perfettamente determinata in quanto le precedenti relazioni assegnano le immagini dei vettori di una base. Per studiare l'applicazione lineare bisogna introdurre una matrice associata all'applicazione lineare, rispetto a delle opportuni basi, una nel dominio e l'altra nel codominio. Quando si conoscono degli autovettori è ovvio che bisogna scegliere una base del dominio e codominio che contenga questi autovettori, perchè in tal caso la matrice ottenuta conterrà molti zeri e quindi sarà più facile da trattare.
   Quindi detta $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ si ha che la matrice associata è $M(f)^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 2-h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Per $h \neq 0, 2$ il rango è 2. Quindi dim$Im(f) = 2$ e una base dell'immagine è data $\langle v_1, v_2\rangle$, come si vede dalle relazioni che definiscono f. Per trovare il Ker$f$ basta risolvere il sistema omogeneo costruito sulla matrice e si trova $x = 0; \quad y = 0$. Quindi una base del nucleo si trova prendendo, per esempio, il vettore che ha rispetto alla base $\mathcal{B}$ le componenti $(0, 0, 1)$. Si trova v_3.

   b) Se $h = 0$, la matrice diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi Im$(f) = \angle v_2\rangle$. Per il Ker$(f)$ dal sistema si trova $y = 0$ e quindi come base del nucleo si possono prendere i vettori di componenti $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$; cioè v_1 e v_3.

   c) Per $h = 2$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

È immediato che una base per $Im(f) = \langle v_1 \rangle$ e una base per $Ker(f) = \langle v_2, v_3 \rangle$.

2. Scriviamo la matrice caratteristica $\begin{pmatrix} h-T & 0 & 0 \\ 0 & (2-h)-T & 0 \\ 0 & 0 & -T \end{pmatrix}$. È immediato calcolare gli autovalori; essi sono $T_1 = 0$; $\quad T_2 = h$; $\quad T-3 = 2-h$. Essi sono tutti reali. Per i valori di h per cui essi sono anche distinti si sa che l'endomorfismo è semplice. Vediamo quando si hanno autovalori multipli. Esaminiamo tutti i casi che si possono presentare.

   i) $T_1 = T_2$, e ciò per $h = 0$; ne segue $T_3 = 2$. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $T = 0$. La matrice cartteristica diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ed ha rango 1. Quindi la $\dim V_0 = 3 - 1 = 2$.
   In tal caso l'endomorfismo è semplice.

   ii) $T_1 = T_3 = 0$ e ciò per $h = 2$. La matrice cartteristica diventa $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ed ha rango 1. Quindi la $\dim V_0 = 3 - 1 = 2$.
   Anche in tal caso l'endomorfismo è semplice.

   iii) $T_2 = T_3 \Leftrightarrow h = 2 - h \Leftrightarrow h = 1$. Si ha $T_2 = T_3 = 1$. Anche in tal caso l'endomorfismo è semplice.

   iv) Per $h \neq 0, 1, 2$ gli autovalori sono tutti reali e distinti e l'endomorfismo è semplice.

   In conclusione l'endomorfismo è sempre semplice.

3. Diciamo (x, y, z) le componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, del generico vettore $v \in V$.
   Per calcolare $f(v)$ basta moltiplicare la matrice $A = M(f)^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ per il vettore $\underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   Nel nostro caso si ha

$$\begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 2-h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 = hx \\ y_2 = (2-h)y \\ y_3 = 0 \end{pmatrix}.$$

   Il vettore $\underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ fornisce le componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, del vettore $f(v)$.
   Quindi $f(v) = hxv_1 + (2-h)v_2 = hx(1,0,1) + (2-h)(1,1,-1) = (hx + (2-h)y, (2-h)y, hx + (h-2)y)$. Imponendo che tali componenti soddisfino $y_1 + y_3 = 0$ si ha, nel nostro caso: $hx + 2y - hy + hx + hy - 2y = 0$ cioè $2hx = 0$.
   Per $h = 0$ la precedente è una identità, e quindi il sottospazio V coincide con tutto $\mathbb{R}^3$.
   Se $h \neq 0$ segue $x = 0$ e quindi V si ottiene da $yv_2 + zv_3$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u.$

1. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$(h+1)x^2 + (1-h)y^2 - 4x + 2 = 0$$

   caratterizzando tutte le coniche del fascio e determinando i punti base e le coniche spezzate.

2. Detta $\wp$ la parabola del fascio, determinare le quadriche contenenti $\wp$ ed aventi in $Z_\infty = (0,0,1,0)$ come piano tangente il piano $x+y=0$.

3. Provare che le quadriche ottenute sono tutte degeneri. Trovare i rispettivi vertici ed il luogo da essi descritto.

Risoluzione L'equazione del fascio si può scrivere:

$$h(x^2-y^2)+x^2+y^2-4x+2=0$$

La conica che è a fattore di h, $x^2-y^2=0$, si spezza nelle rette $(x-y)(x+y)=0$. L'altra conica con cui è formato il fascio: $x^2+y^2-4x+2=0$ è la circonferenza di centro $C=(2,0)$ e raggio $r=\sqrt{4-2}$.

1. Per trovare i punti base basta intersecare le due precedenti coniche. Si trova

$$\begin{cases} x=y \\ x^2+y^2-4x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \quad \text{m=2} \end{cases}$$

Analogamente $\begin{cases} y=-1 \\ x=1 \quad \text{m=2} \end{cases}$. Si può concludere che le due rette di equazioni $x=\pm y$ sono tangenti alla circonferenza $x^2+y^2-4x+2=0$. La conica congiungente i punti base $x=1$, contata due volte, è un'altra conica spezzata.

La matrice della conica della conica è $B=\begin{pmatrix} h+1 & 0 & -2 \\ 0 & 1-h & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si deduce $|B| = 2(1+h)(1-h)-4(1-h)=2(1-h)(1+h-2)=-2(1-h)^2$. Si può affermare che per $h\neq 1$ si hanno coniche irriducibili. $|A|=1-h^2$. In definitiva si hanno
Ellissi per $1-h^2>0 \Rightarrow -1<h<1$
Iperboli per $1-h^2<0 \Rightarrow h<-1 \text{e} \quad h>1$
Parabola per $h=-1$. Per $h=1$ il determinante di B è zero e si ha una conica spezzata.
La parabola $\wp$ del fascio ha equazioni $\begin{cases} z=0 \\ y^2-2x+1=0 \end{cases}$.

2. Le quadriche che contengono $\wp$ sono tutte e sole quelle la cui equazione è del tipo

$$z(ax+by+cz+d)+y^2-2x+1=0$$

Dopo avere scritto la precedente in coordinate omogenee: $z(ax+by+cz+dt)+y^2-2xt+t^2=0$, imponendo il passaggio per $Z_\infty-(0,0,1,0)$ si trova che dev'essere $c=0$. Il piano tangente in Z_∞ è dato da

$$(0,0,1,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 0 & \frac{d}{2} \\ -1 & 0 & \frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=0$$

cioè $ax+by+d=0$. Per identificare questa all'equazione richiesta basta porre $d=0; b=a$. Il fascio di quadriche $\mathcal{Q}$ trovato è $z(ax+ay)+y^2-2x+1=0$.

3. Troviamo la matrice B della generica quadrica $\mathcal{Q}$. Si ha $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il $|B|=0$ sempre per ogni a. Il $|A|=-\frac{a^2}{4}$.
Per $a\neq 0$ si hanno coni. Per $a=0$ si ha un cilindro che però si deve scartare dalle nostre considerazioni perchè per esso Z_∞ è vertice e il piano tangente nel vertice non è definito.

Per trovare il luogo dei vertici basta risolvere per $a \neq 0$ il sistema $\begin{cases} \frac{a}{2} = 1 \\ y + \frac{a}{2} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$. Si trova $\begin{cases} z = \frac{2}{a} \\ y = -\frac{a}{2}\frac{2}{a} = -1 \\ x = 1 \end{cases}$. Il luogo dei vertici è quindi la retta di equazioni $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.