FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Edile Architettura

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 26/01/2010

1-Durata della prova: tre ore.
2-Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
3-Si possono consultare solo i libri di testo.
4-Usare solo la carta fornita dal Dipartimento.

I

In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:

$$v_1 = (1,1,1); \quad v_2 = (0,1,1); \quad v_3 = (1,1,0) \ \text{ e } \ v_4 = (1,-1,1)$$

1. Sapendo che v_1, v_2 e v_3 sono autovettori di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, determinare i rispettivi autovalori tenendo conto che $f(v_4) = (h, 1, -h)$.
2. Tenuto conto che gli autovalori determinati al numero precedente sono $\lambda_1 = \frac{-1}{3}$; $\lambda_2 = \frac{h-1}{2}$; $\lambda_3 = \frac{-(h+1)}{2}$, studiare al variare di h l'applicazione lineare f determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
3. Detto $V = \mathcal{L}(v_1, v_4)$ trovare il valore di h per cui $f_{|V}$ induca un endomorfismo $f' : V \to V$. Diagonalizzare $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f')$, con $\mathcal{B} = \{v_1, v_4\}$, indicando la matrice diagonalizzante.
4. Trovare, al variare di h, la controimmagine $f^{-1}(W)$, con $W = \mathcal{L}(v_2, v_4)$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

Si considerino le rette

$$r \ \begin{cases} x+y=0 \\ t=0 \end{cases} \qquad s \ \begin{cases} x-1=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad t \ \begin{cases} z-1=0 \\ y=0 \end{cases}$$

1. Detto G un punto generico di r, si determini e si studi la quadrica Q luogo delle rette g passanti per G e complanari ad s e t.
2. Determinare tutte le possibili sezioni piane di Q.
3. Studiare in particolare la sezione Γ di Q col piano $x + y + z + 1 = 0$ e ridurre a forma canonica la proiezione ortogonale di Γ sul piano $z = 0$.
4. Trovare i sistemi di rette su Q.