FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria Elettronica-Nuovo ordinamento**

Risoluzione compito del 18/12/01

I

Studiare al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} (h+2)x + 2hy - z = 1 \\ x - y + (1+h)z = 0 \\ y + z = h \end{cases}$$

Sapendo che le tre equazioni del sistema rappresentano dei piani dello spazio, interpretare geometricamente i risultati ottenuti.

Risoluzione Riducendo per righe la matrice completa del sistema si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h+2 & 2h & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1+h & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1+h & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ h+2 & 2h & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1+h & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & 3h+2 & -h^2-3h-3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1+h & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & 0 & -h^2-6h-5 & -3h^2-2h+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1+h & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & 0 & -(h+1)(h+5) & -(h+1)(h-\frac{1}{3}) \end{array}\right)$$

Nel passaggio (1) si sono scambiate le righe della matrice.

In (2) si è sottratto alla terza riga la prima moltiplicata per $(h+2)$.

In (3) si è sottratto alla terza riga la seconda moltiplicata per $(3h+2)$.

In (4) si sono decomposti i polinomi che vi figurano in fattori.

La conclusione è che:

Per $h \neq -1, -5$ il rango della matrice dei coefficienti e il rango della matrice completa è 3 ed il sistema ammette **una e una sola soluzione**.
Dall'ultima matrice per sostituzione si ha la soluzione:

$$x = \frac{\frac{10}{3}h + \frac{2}{3}}{h+5} \qquad y = \frac{h^2 + 4h + \frac{1}{3}}{h+5} \qquad z = \frac{h - \frac{1}{3}}{h+5}$$

Dal punto di vista geometrico i tre piani si incontrano in uno e un solo punto.

Per $h = -5$ il sistema è **incompatibile**. Dal punto di vista geometrico i primi due piani si incontrano in una retta e il terzo piano è parallelo a tale retta.

Per $h = -1$ il sistema è compatibile ed ammette ∞^1 **soluzioni**, che si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ z = -y - 1 \end{cases}$$

Dal punto di vista geometrico accade che il terzo piano passa per la retta individuata dai primi due piani.

II

Sia $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorfismo associato, rispetto alla base $\mathcal{B}$, alla matrice

$$A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

dove $\mathcal{B} = \{p_1(X) = 3X + 3X^2;\ p_2 = -1 + 3X + 2X^2;\ p_3 = 3 + 7X + 2X^2\}$.

Trovare:

a) $[f(p_1)]_{\mathcal{B}}$; b) $f(p_2)$; c) $f(1 + X^2)$.

Risoluzione

a) Con la notazione $[f(p_1)]_{\mathcal{B}}$ si denotano le componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, di $f(p_1(X)$. Per definizione di matrice associata ad una applicazione lineare rispetto a delle basi scelte sia nel dominio che nel codominio, tali componenti sono date dalla prima colonna della matrice, cioè dai numeri 1,2,6.

b) Sempre per definizione , le componenti 3,0,-2 danno le componenti di $f(p_2(X))$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Quindi

$$f(p_2(X) = 3p_1(X) + 0p_2(X) - 2p_3(X)$$

In definitiva $f(p_2(X)) = 5X^2 - 5X - 6$.

c) Per trovare $f(1 + X^2)$ si devono innanzitutto trovare le componenti del polinomio $1 + X^2$ nella base $\mathcal{B}$. Esse sono date da

$$1 + X^2 = a(3X + 3X^2) + b(-1 + 3X + 2X^2) + c(3 + 7X + 2X^2)$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 3a + 2b + 2c = 1 \\ 3a + 3b + 7c = 0 \\ -b + 3c = 1 \end{cases}$$

Quindi $a = 1$; $b = -1$; $c = 0$. A questo punto moltiplichiamo la matrice A per il vettore colonna delle componenti trovate $(1, -1, 0)$. Si ottengono le componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $f(1+X^2)$, che sono (-2,2,8). Facendo i calcoli si ha $f(1+X^2) = -2(3X+3X^2)+2(-1+3X+2X^2)+8(3+7X+2X^2) = 14X^2+56X+22$.

III

Studiare la semplicità dell'endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

- $\varphi(1, 1, 1) = (1, -2, 0)$;
- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 2x + y - z = 0\}$ sia un autospazio.

Quando possibile trovare una base di autovettori.

Risoluzione

Per individuare una applicazione lineare bisogna assegnare le immagini dei vettori di una base del dominio. Da $z = 2x + y$ si ha che il generico vettore di V è $(x, y, 2x + y)$. Quindi una base di V è data da $(1, 0, 2)$; $(0, 1, 1)$. Inoltre questi sono autovettori perchè appartengono all'autospazio V. I vettori $(1, 0, 2)$; $(0, 1, 1)$; $(1, 1, 1)$ sono indipendenti e costituiscono una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.

Si avrà

$$\varphi(1,0,2) = \lambda(1,0,2); \quad \varphi(0,1,1) = \lambda(0,1,1); \quad \varphi(1,1,1) = (1,-2,0).$$

La matrice $A = M(\varphi)^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice caratteristica è

$$\begin{pmatrix} \lambda - T & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - T & -2 \\ 0 & 0 & -T \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono $T = \lambda$ con molteplicità $m_\lambda = 2$ e $T = 0$ semplice.
Due casi sono possibili; o l'autovalore $T = 0$ è triplo per $\lambda = 0$; oppure $\lambda \neq 0$.
Nel primo caso la matrice caratteristica ha rango 1 e quindi $dimV_0 = 3 - rk(A - 0I) = 2$; in tal caso l'endomorfismo non è semplice.

Se $\lambda \neq 0$ la dimensione dell'autospazio V_λ è due e quindi l'endomorfismo è semplice.
E' facile trovare una base di autovettori. Infatti i vettori (1,0,2) e (0,1,1) sono autovettori associati a λ. Basta trovare un autovettore associato all'autovalore nullo. Quindi basta risolvere il sistema $\begin{cases} \lambda x + z = 0 \\ \lambda y - 2z = 0 \end{cases}$, si ottiene la soluzione (1,-2,-λ), che sono le componenti dell'autovettore associato all' autovalore nullo, rispetto alla base $\mathcal{B}$. Si ha $1(1,0,2) - 2(0,1,1) + \lambda(1,1,1) = (1+\lambda, -2+\lambda, \lambda)$.

IV

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u.$

1. Trovare l' iperbole Γ del piano $z = 0$, passante per $(\frac{1}{4}, 1, 0)$ ed avente per asintoti l'asse $\vec{x}$ e la retta $\begin{cases} z = 0 \\ 4x - 3y + 4 = 0. \end{cases}$
2. Studiare Γ e trovare una sua forma canonica.
3. Trovare l'equazione del cono avente Γ come direttrice e vertice $V = (0,0,1)$.

Risoluzione

1. L'iperbole Γ appartiene al fascio

$$\lambda y(4x - 3y + 4) + \mu t^2 = 0$$

Imponendo il passaggio per il punto $(\frac{1}{4}, 1)$ del piano $z = 0$, si ha $2\lambda + \mu = 0$ quindi $\mu = -2\lambda$.
Si ottiene la conica Γ di equazioni $\begin{cases} z = 0 \\ y(4x - 3y + 4 = 0. \end{cases}$

2. La matrice B della conica è $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Calcoliamo $|B| = 8$ e $|A| = -4$. Si tratta quindi di una iperbole, avente centro $C = (-1, 0)$. Troviamo una forma canonica.
Essa sarà del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$. Sia $(A - TI) = \begin{pmatrix} -T & 2 \\ 2 & -3-T \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è $T^2 + 3T - 4 + 0$. Gli autovalori sono $\alpha = 1; \beta = -4$. Utilizzando gli invarianti ortogonali si ha $\gamma = -\frac{|B|}{|A|} = 2$. Quindi una forma canonica è: $X^2 - 4Y^2 = 2$.

3. Troviamo il cono di direttrice Γ e vertice $V = (0,0,1)$.

Sia $G = (\alpha, \beta, 0)$ un punto generico sulla conica Γ di equzioni $\begin{cases} z = 0 \\ 4xy - 3y^2 + 4y - 2 = 0, \end{cases}$ quindi α e β dovranno soddisfare l'equazione di condizione $4\alpha\beta - 3\beta^2 + 4\beta - 2 = 0$. Le equazioni della retta GV sono $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z-1}{-1}$. L'equazione del cono si trova eliminando i parametri α e β dal sistema

$$\begin{cases} 4\alpha\beta - 3\beta^2 + 4\beta - 2 = 0 \\ \alpha = \frac{x}{1-z} \\ \beta = \frac{y}{1-z} \end{cases}$$

In definitiva l'equazione del cono è

$$4xy - 3y^2 + 4y(1-z) - 2(1-z)^2 = 0$$