FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria Elettronica-Nuovo Ordinamento**

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 7/01/2002

Risoluzione compito del 7/01/02

I

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

1-Determinare l'equazione della generica quadrica $\mathcal{Q}$ contenente la conica

$$\Gamma : \begin{cases} x - z = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0, \end{cases}$$

tangente alla retta di equazioni $\begin{cases} z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ in $X_\infty = (1, 0, 0, 0)$ ed avente in O piano tangente $x = 0$.

Risoluzione

La più generale quadrica contenente Γ ha equazione

$$(x - z)(ax + by + cz + dt) + x^2 + y^2 - xt = 0.$$

Essa deve passare per il punto $X_\infty = (1, 0, 0, 0)$, quindi deve essere $a = -1$. Facendo sistema tra l'equazione della quadrica e la retta di equazioni $\begin{cases} z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ si ottiene, dopo aver fatto la sostituzione $a = -1$,

$$\begin{cases} z = 0 \\ t = 0 \\ bxy + y^2 = 0. \end{cases}$$

Per avere due soluzioni coincidenti dev'essere $b = 0$.

Vogliamo ancora che la quadrica abbia in O piano tangente $x = 0$. Intanto tutte le quadriche di $\mathcal{Q}$ passano per O ed il piano tangente in O si ottiene eguagliando a zero il complesso dei termini di primo grado $dx - dz - x = 0$. Perchè $x = 0$ sia il piano tangente in O dev'essere $d = 0$.

In definitiva le quadriche di $\mathcal{Q}$ costituiscono un fascio di equazione:

$$y^2 + (c + 1)xz - cz^2 - x = 0.$$

2-Studiare la totalità delle quadriche $\mathcal{Q}$ e fra queste trovare l'equazione del cono C.

Risoluzione

Le matrici B e A di $\mathcal{Q}$ sono rispettivamente

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c+1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c+1}{2} & 0 & -c & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c+1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c+1}{2} & 0 & -c \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che $|B| = \frac{c}{4}$ e $|A| = -(\frac{c+1}{2})^2$.

Quindi si hanno quadriche **non degeneri** per $c \neq 0$.

Per $c = 0$ si ottiene la quadrica $y^2 + xz - x = 0$, che è un cono C con vertice $V = (0, 0, 1)$.

La conica all'infinito C_∞ è irriducibile per $c \neq -1$.

Si conclude che per $c > 0$ si hanno **iperboloidi iperbolici**.

Per $c < 0$ si hanno **iperboloidi ellittici**; mentre per $c = -1$ si ha un **paraboloide ellittico**.

3-Fra i piani contenenti l'asse $\vec{y}$, che hanno equazione $x = \lambda z$, caratterizzare quelli che secano C in iperboli, in parabole ed in ellissi.

Risoluzione

Secando il cono C di equazione $y^2 + xz - x = 0$ con il generico piano $x = \lambda z$ si ottiene una conica i cui punti impropri si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} x = \lambda z \\ t = 0 \\ y^2 + xz - xt = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda z \\ t = 0 \\ y^2 + \lambda z^2 = 0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ si ottiene il piano $x = 0$ che, contenendo il vertice seca C in una conica spezzata.

Per $\lambda > 0$ si hanno **ellissi**. Per $\lambda < 0$ si hanno **iperboli**.

II

Considerare le seguenti relazioni

$$\varphi(1+X) = 0; \quad \varphi(1-X^2) = -X-X^2; \quad \varphi(X^2-X^3) = 1-X-X^2+X^3 \quad \varphi(X^3) = X+X^2$$

1. Provare che queste relazioni definiscono un unico endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$.
2. Studiare tale endomorfismo determinando una base di $Ker\varphi$ e una di $Im\varphi$.
3. Provare che φ è semplice e determinare una base di autovettori.
4. Dopo avere scritto la matrice associata a φ, rispetto alla base $\mathcal{A}$ di autovettori, verificare che $\varphi = \varphi^2$.
5. Detto $U = Ker\varphi$ e $W = Im\varphi$ provare che $W = Ker(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]})$. Dedurre che $\mathbb{R}_3[X] = U \oplus W$.

Risoluzione

1. Per rispondere alla domanda 1. bisogna far vedere che i polinomi:

$$1 + X;\ 1 - X^2;\ X^2 - X^3;\ X^3$$

sono linearmente indipendenti; ciò è immediato perchè la matrice delle componenti dei polinomi rispetto alla base $\mathcal{B} = (1; X; X^2; X^3)$ è di rango massimo. Ed è noto che assegnado le immagini dei vettori di una base, l'applicazione lineare è perfettamente determinata.

2. Troviamo adesso la matrice associata a φ relativamente alla base $\mathcal{B} = (1; X; X^2; X^3)$. Si ha

$$A = M(\varphi)^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{che ridotta per righe diventa} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essa è di rango 2 e quindi $dimIm\varphi$ è 2. Una base dell'immagine è data prendendo come componenti, rispetto a $\mathcal{B}$, per esempio le ultime due colonne della matrice di partenza. Quindi i polinomi $1 + X^3, X + X^2$ sono una base dell'immagine. Mentre il nucleo $Ker\varphi$ si trova dal sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + t = 0. \end{cases}$ Si trovano le componenti $(1, 0, -1, 1)$; $(0, 1, 1, -1)$. Dalle componenti si trovano i polinomi $1 - X^2 + X^3$; $X + X^2 - X^3$, base del nucleo.

3. Scriviamo la matrice caratteristica

$$(A - TI) = \begin{pmatrix} 1-T & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1-T & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -T & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -T \end{pmatrix}$$

Sviluppando opportunamente il determinante $|A - TI| = T^2(T-1)^2$. L'autovalore $T = 0$ è doppio e il rango della matrice $(A - 0I) = A$ è due. Quindi la dimensione dell'autospazio V_0 è anch'essa due. Analogamente il rango della matrice $(A - I)$ è due e la dimensione dell'autospazio V_1 è due. Ne segue che l'endomorfismo è semplice. E le componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, di una base di autovettori sono:

$$w_1 = (1, 0, -1, 1);\ (w_2 = (0, 1, 1, -1);\ w_3 = (1, 0, 0, 1);\ w_4 = (0, 1, 1, 0)$$

4. La matrice associata a φ rispetto alla base di autovettori diventa:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E' immediato verificare che $A'^2 = A'$, quindi $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = \varphi$.

5. Sia $\overline{w} \in Im\varphi$. Ciò significa che esiste un $\overline{v}$ tale che $\varphi(\overline{v}) = \overline{w}$. Applicando φ ad ambo i membri, tenendo conto che $\varphi^2 = \varphi$, si ha $\varphi\varphi(\overline{v}) = \varphi(\overline{v}) = \overline{w} = \varphi(\overline{w})$. Dall'ultima si deduce che $\overline{w}$ è un autovettore associato all'autovalore 1. Quindi $Im\varphi \subseteq Ker(\varphi - id_{\mathbb{R}_3[X]})$; ma i due sottospazi hanno la stessa dimensione e quindi $Im\varphi = Ker(\varphi - id_{\mathbb{R}_3[X]})$.

La conclusione segue tenendo conto del teorema spettrale e del fatto che $Ker\varphi = V_0$ e $Ker(\varphi - id_{\mathbb{R}_3[X]}) = V_1$. Ricordare inoltre che la somma autospazi è sempre diretta.

In effetti si può facilmente arrivare alla stessa conclusione con calcoli diretti.

III

Data la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dire perchè ci sono 4 matrici ortogonali speciali, cioè con determinante 1, che diagonalizzano A.

Risoluzione Ci sono due autovalori reali e distinti: -1, 1. Si possono prendere due autovettori v_1 e v_2 ciascuno dei quali da' luogo a due versori. Quindi scegliendo nell'ordine v_1 e v_2 ci sono 4 possibilità che dipendono dai possibili modi di combinare i vari orientamenti. Ci sono altre 4 possibilità se si inverte l'ordine degli autovettori e cioè v_2 e v_1. In definitiva delle 8 scelte possibili solo 4 hanno daterminante 1.