FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria Elettronica-Vecchio ordinamento**

Risoluzione della prova scritta di **Geometria I** assegnata il 7/1/2002,

I

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

1. Determinare e studiare la totalità $\mathcal{Q}$ di quadriche aventi C_∞ $\begin{cases} t = 0 \\ (2x+y)z = 0 \end{cases}$ come conica all'infinito e che sono secate dal piano $y = 0$ nella conica Γ avente centro nel punto $C = (-1, 0, -1)$ e passante per $P = (1, 0, -\frac{3}{4})$.

Risoluzione

1. Le quadriche $\mathcal{Q}$ aventi tale C_∞ sono quelle aventi equazione

$$t(ax + by + cz + dt) + 2xz + yz = 0.$$

Secando col piano $y = 0$ si ottiene la conica Γ del piano $y = 0$ di equazione $ax + cz + d + 2xz = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P si ha: (1) $\quad a - \frac{3}{4}c + d - \frac{3}{2} = 0$. Detta $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{a}{2} \\ 1 & 0 & \frac{c}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{c}{2} & d \end{pmatrix}$ la matrice della conica Γ imponendo che abbia il centro C richiesto si ottiene $a = -2$ e $c = -2$. Tenendo conto della (1) si ha che $d = 1$ Da B calcolando il determinante si ha $|B| = \frac{ac}{2} - d$. Quindi nel nostro caso la conica Γ è irriducibile.

Le quadriche $\mathcal{Q}$ costituiscono un fascio di equazione

$$2x + by + 2z + 1 + 2xz + yz = 0.$$

Scriviamo la matrice di $\mathcal{Q}$. Essa è data da $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{b}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si trova che $|B| = (\frac{b-1}{2})^2$ e $|A| = 0$, come era prevedibile, visto che tutte le quadriche di $\mathcal{Q}$ hanno la C_∞ spezzata.

Per $b = 1$ si ha un cilindro iperbolico di vertice $(1, -2, 0, 0)$

Per $b \neq 1$ si hanno sempre **paraboloidi iperbolici**.

2. Determinare una forma canonica di Γ e il cambiamento di coordinate che la ha determinata.

Risoluzione

2. La conica Γ ha equazioni $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2z + 1 + 2xz = 0 \end{cases}$ La sua matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Gli autovalori della sottomatrice A sono $\alpha = -1; \beta = 1$. Una forma canonica della conica Γ è $X^2 - Y^2 = 1$ e il cambiamento di coordinate è dato dalle formule della rototraslazione

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) - 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) - 1 \end{cases}$$

3. Caratterizzare i piani che secano le quadriche di $\mathcal{Q}$ in parabole, distinguendo tutti i possibili casi.

Risoluzione

3. Il centro dei paraboloidi del fascio è il punto di coordinate $(1, -2, 0, 0)$. Tutti i piani che secano in parabole sono quelli passanti per il suddetto centro esclusi quelli dei due fasci di piani aventi per asse le due rette $\begin{cases} t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} t = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$. Quindi sono i piani del tipo $2bx + by + cz + dt = 0$, con la condizione $b \neq 0$, e $c \neq 0$. Per $b = 1$ si ha un cilindro iperbolico e quindi le sezioni non possono essere parabole.

II

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$f(x, y, z) = (kx + y + z, x + ky + z, x + y + kz)$$

Determinare, al variare di k, ove possibile, la controimmagine di $(1, k, k^2)$.

Dare una interpretazione geometrica dei risultati ottenuti.

Risoluzione

Riduciamo la matrice completa per righe; si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 0 \\ 1-k & k-1 & 0 & h \\ 1-k^2 & 1-k & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)}$$

Nella prima riga c'è un elemento speciale. Se $k = 1$ la matrice completa diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In tal caso il sistema ammette ∞^2 soluzioni e si ha $x + y + z = 1$. Da ciò $x = 1 - y - z$ e le soluzioni del sistema sono $(1 - y - z, y, z)$, con y e z variabili libere. Geometricamente si hanno tre piani coincidenti.

Se invece $k \neq 1$ riprendendo la riduzione si ottiene la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1-k & k-1 & 0 & k-1 \\ -k^2-k+2 & 0 & 0 & k^2-1 \end{array}\right)$$

Ora $k^2 + k - 2 = 0$ per $k = -2, 1$. Il termine noto corrispondente $k^2 - 1 = 0$ per $k = \pm 1$. In definitiva il sistema per $k = -2$ è impossibile perchè in corrispondenza ad una riga nulla c'è un elemento non nullo.

Geometricamente il terzo piano è parallelo alla retta in cui si interesecano i primi due. Per $k \neq 1, -2$ il sistema ammette una e una sola soluzione.

Geometricamente i tre piani si incontrano in un solo punto. Il calcolo delle coordinate del punto comune è lasciato allo studente.

III

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo associato, rispetto alle basi canoniche, alla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$. Esaminare le seguenti affermazioni:

A $Kerf^2 \subset Kerf$ (inclusione stretta).
E'facile vedere che $A^2 = 9A$. Quindi $Kerf = Kerf^2$. Quindi tale affermazione è **falsa**.

B $Kerf^2 = Kerf$.
Vera, per quanto visto sopra.

C $Kerf^2 + Kerf$ è somma diretta.
Ovviamente no perchè altrimenti l'intersezione avrebbe dovuto contenere solo lo $O_{\mathbb{R}^2}$.

D Non esiste un sottospazio $V \subset \mathbb{R}^2$ tale che $\mathbb{R}^2 = Kerf \oplus V$.
Falsa. Basterebbe prendere come V l'ortogonale a $Kerf$.

IV

Si consideri l'endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato rispetto alle basi canoniche alla matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Dimostrare che esistono 48 matrici ortogonali che diagonalizzano A.

Risoluzione

La matrice caratteristica è

$$\begin{pmatrix} 4-T & 0 & 2 \\ 0 & 1-T & 0 \\ 2 & 0 & 4-T \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è $(1-T)[(4-T)^2 - 4]$. Quindi gli autovalori sono: $T = 1$; $T = 2$; $T = 6$. Ci saranno tre autovettori distinti $v_1; v_2; v_3$. A ciascuno di questi si possono associare due versori orientati in modo opposto. Si hanno 8 possibili scelte, una volta fissato l'ordine degli autovettori. Ma siccome gli autovettori si possono ordinare in 6 modi, le nostre possibili scelte sono 48.