FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 19-07-06

I

Si consederi l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle seguenti condizioni:

$$f(v_1) = (h, -1, -1);$$

$$v_2 \text{ è un autovettore associato all' autovalore } T = h - 1;$$

$$f(v_3) = (-2, h+1, h+1),$$

dove i vettori $v_1 = (1, 0, 0)$; $v_2 = (-1, 1, 0)$; $v_3 = (0, 1, 1)$ costituiscono una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.

1. Studiare, al variare di h, l' endomorfismo, determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
2. Dopo avere trovato la matrice $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, studiare, al variare di h, la semplicità dell' endomorfismo f.
3. Determinare, al variare di h, il sottospazio V del dominio tale che $f(V) = W$, dove W è il sottospazio del codominio costituito dai vettori che hanno nulle le prime due componenti $y_1,\ y_2$, rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Risoluzione

1. Visto che si deve scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ in entrambi gli spazi, dominio e codominio, troviamo innanzitutto le componenti del generico vettore $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
   Si ha pertanto: $(a, b, c) = x(1, 0, 0) + y(-1, 1, 0) + z(0, 1, 1)$. Si deduce il sistema lineare $\begin{cases} x - y = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases}$, e quindi le componenti risultano: $x = a + b - c; y = b - c; z = c$.
   Tenendo conto dei dati del problema si ottiene quindi facilmente la matrice $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} h & 0 & -2 \\ 0 & h-1 & 0 \\ -1 & 0 & h+1 \end{pmatrix}$. Si calcolano le componenti di $f(v_1) = (h, -1, -1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e si mettono nella prima colonna della matrice associata. Si tiene conto che $f(v_2) = (h-1)(-1, 1, 0)$ e si fa la stessa cosa. Analogamente per $f(v_3) = (-2, h+1, h+1)$.
   Calcoliamo il determinante di $|A| = (h-1)(h^2 + h - 2) = 0$. Si hanno le soluzioni $h = 1$ contata due volte; e $h = -2$.
   Per $h = 1$ la matrice diventa $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Quindi $r(A) = 1$. Una base dell'immagine è il vettore che ha come componenti, rispetto a $\mathcal{B}$, la prima colonna di A. Per trovare il $Ker(f)$, basta risolvere il sistema lineare omogeneo costruito su A. Si trova $x = 2z$; la soluzione generica è $(2z, y, z)$. Quindi una base di $Ker(f)$ è costituita dai vettori che hanno componenti $(2, 0, 1)_{\mathcal{B}}$ e $(0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$.

Per $h = -2$ la matrice diventa $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il suo rango è due e una base dell'immagine è data dai vettori che hanno le componenti rispetto a $\mathcal{B}$ date da: $(2,0,1)_{\mathcal{B}}$, $0,1,0)_{\mathcal{B}}$. Una base di $Ker(f)$ è data dal vettore di componenti: $(1,0,-1)_{\mathcal{B}}$.

2. Calcoliamo la matrice caratteristica $(A - TI) = \begin{pmatrix} h-T & 0 & -2 \\ 0 & (h-1)-T & 0 \\ -1 & 0 & (h+1)-T \end{pmatrix}$.
Sviluppando il determinante della matrice con Laplace applicato alla seconda colonna, si ha: $T_1 = h - 1$ e $[(h-T)((h+1)-T)] - 2 = 0$. Da cui si ottiene
$T^2 - (2h+1)T + h^2 + h - 2 + 0$. Si vede facilmente che le radici sono $T_2 = h - 1; T_3 = h + 2$. Quindi si ha sempre, qualunque sia h, che $T_1 = T_2 = h - 1$. Visto che si ha sempre un autovalore doppio calcoliamo la $dimV_{h-1}$. La matrice caratteristica diventa, per $T = h - 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Il suo rango è uno e quindi $dimV_{h-1} = 3 - 1 = 2$. Ed allora l'endomorfismo è sempre semplice.

3. Calcoliamo l'immagine del generico vettore $v \in \mathbb{R}^3$. Dette (x, y, z) le sue componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$, si ha:

$$\begin{pmatrix} h & 0 & -2 \\ 0 & h-1 & 0 \\ -1 & 0 & h+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 = hx - 2z \\ y_2 = (h-1)y \\ y_3 = -x + (h+1)z \end{pmatrix}$$

Imponiamo le condizioni richieste $\begin{cases} hx - 2z = 0 \\ (h-1)y = 0 \end{cases}$, si devono distinguere due casi:
1) Per $h = 1$; segue $x = 2z$; da cui si ha $(2z, y, z)$. In questo caso V ha dimensione 2 ed una base è data dai vettori le cui componenti, rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(2,0,1)_{\mathcal{B}}$ e $(0,1,0)_{\mathcal{B}}$.
2) Per $h \neq 1$ si ha $\begin{cases} y = 0 \\ z = \frac{hx}{2} \end{cases}$. In tal caso la dimensione di V è uno e una base è data dal vettore di componenti $(2, 0, h)_{\mathcal{B}}$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$

1. Nel piano $z = 0$, si consideri la totalità $\Re$ delle coniche tangenti in $A = (1,0)$ alla retta $x - ay - 1 = 0$, passanti per $O = (0,0)$ e per $B = (1,1)$, dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

2. Fra le coniche di $\Re$ determinare quelle passanti per $C = (2,1)$. Si ottiene un fascio di coniche $\Im$. Studiare $\Im$ determinando i punti base e le coniche spezzate.

3. Detta C la conica di $\Im$ che si ottiene per $a = 2$, trovare:

   - una sua forma canonica;
   - l' equazione del cilindro avente C come direttrice e generatrici parallele alla retta di equazioni $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$.

Risoluzione

1. La totalità delle coniche $\Re$ si può individuare facendo combinazione lineare delle coniche

spezzate nella tangente $x - ay - 1 = 0$ e nella retta OB e nelle rette OA e AB. Si ottiene l'equazione $(x - y)(x - ay - 1) + \lambda(x - 1)y = 0$.

2. Imponendo il passaggio per il punto $C = (2, 1)$ si ha $1 - a + \lambda = 0$ da cui $\lambda = a - 1$. Si trova il fascio di coniche:

$$(x - y)(x - ay - 1) + (a - 1)(xy - y) = 0.$$

E semplificando: $x^2 - 2xy - x + 2y + a(y^2 - y) = 0$. I punti base sono ovviamente $O = (0, 0); A = (1, 0); B = (1, 1); C = (2, 1)$. Le coniche spezzate si calcolano in modo ovvio.

La matrice della conica è $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & a & \frac{2-a}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2-a}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Un semplice calcolo prova che $|B| = \frac{a-a^2}{4}$. Mentre $|A| = a - 1$.

Quindi per $a \neq 0, 1$ si hanno coniche irriducibili; le quali saranno: ellissi per $a > 1$ e iperboli per $a < 1$.

Nel fascio non ci sono parabole perchè per $a = 1$ si hanno coniche riducibili.

3. Poniamo nel fascio $a = 2$; si ottiene l'ellisse $x^2 - 2xy + 2y^2 - x = 0$. Troviamo una sua forma canonica.

Calcoliamo $|A - TI| = 0$. Si trova il polinomio caratteristico $T^2 - 3T + 1 = 0$, da cui $T = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$. Si trovano gli autovalori $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Tenendo conto che $|B| = -\frac{1}{2}$ e che $|A| = 1$ si deduce che $-\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{2}$, da cui $\gamma = \frac{1}{2}$. Quindi una forma canonica può essere

$$\frac{X^2}{\frac{1}{3-\sqrt{5}}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{3+\sqrt{5}}} = 1$$

Nel testo non è richiesto di determinare il cambiamento di coordinate che porta a questa forma canonica.

Nello spazio le equazioni della direttrice C sono $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 - 2xy + 2y^2 - x = 0 \end{cases}$. Si considera un punto generico $G = (\alpha, \beta, 0)$ su C. Si scrive la generica retta per G e parallela alla generatrice data. Si ottiene il sistema $\begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 - \alpha = 0 \\ x - \alpha = 0; \ \frac{y-\beta}{-1} = \frac{z}{1} \end{cases}$. Eliminando α e β dal sistema si ottiene lquazione del cilindro richiesto:

$$x^2 - 2x(y + z) + 2(y + z)^2 - x = 0$$