FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria **Edile Architettura**

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 24/06/09

I

Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ formata ordinatamente dai vettori $v_1 = (2,0,1);\ e_1 = (1,0,0);\ v_2 = (1,1,1)$.

Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da: $f(v_1) = (-1-h, 0, -h)$ e tale che e_1 e v_2 siano autovettori associati all'autovalore $\lambda = -1$.

1. Studiare, al variare di h, l' endomorfismo f determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
2. Dopo aver trovato la matrice $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ associata ad f relativamente alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ discutere la semplicità di f.
3. Provare che la restrizione di f a $W = \{(y_1, y_2, y_3)|y_1 - y_2 - y_3\} = 0$ induce un endomorfismo; diagonalizzare, al variare di h, una matrice della restrizione.

Risoluzione

Dalla definizione segue:

$$f(2,0,1) = (-1-h,0,-h);\ f(1,0,0) = (-1,0,0);\ f(1,1,1) = (-1,-1,-1).$$

Quindi si può scrivere facilmente la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche.

Dal sistema

$$\begin{cases} 2f(e_1) + f(e_3) & = & (-1-h,0,-h) \\ f(e_1) & = & (-1,0,0) \\ f(e_1)+f(e_2)+f(e_3) & = & (-1,-1,-1) \end{cases}$$

Sottraendo dalla prima la seconda e la terza si ha $f(e_2) = (h-1,-1,h-1)$ e ricavando $f(e_3)$ dalla terza si ha $f(e_3) = (1-h,0,-h)$. Quindi la matrice associata rispetto alle basi canoniche è $A = \begin{pmatrix} -1 & h-1 & 1-h \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & h-1 & -h \end{pmatrix}$.

1. Immediatamente si ha $|A| = -h$. Quindi se $h \neq 0$ si ha un isomorfismo.

   Per $h = 0$ la matrice A diventa $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; essa ha rango 2; una base dell' immagine è data da $(1,0,0); (1,1,1)$. Il nucleo si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo $A\underline{X} = \underline{0}$. Una base del nucleo è data da $(1,0,1)$.

2. Troviamo innanzitutto le componenti del generico vettore (a,b,c) nella base $\mathcal{B}$. Da $(a,b,c) = x(2,0,1) + y(1,0,0) + z(1,1,1)$ si deduce che $x = c-b;\ y = a+b-2c;\ z = b$.

   Quindi la matrice associata ad f nella base $\mathcal{B}$ è data da $\begin{pmatrix} -h & 0 & 0 \\ -1+h & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Gli autovalori sono $T = -1$ contato due volte e $T = -h$. La matrice caratteristica è $\begin{pmatrix} -h-T & 0 & 0 \\ -1+h & -1-T & 0 \\ 0 & 0 & -1-T \end{pmatrix}$.

   Per $h = 1$ l' autovalore $T = -1$ ha molteplicità 3. La matrice caratteristica per $h = 1$ e $T = -1$ diventa la matrice nulla ed allora il suo rango è zero e quindi la dimensione dell'autospazio associato all' autovalore $T = -1$ è 3; in tal caso il nostro endomorfismo è

semplice.
Per $h \neq 1$ la radice $T = -1$ è doppia ed in tal caso la matrice caratteristica ha rango 1 ed anche in questo caso l' endomorfismo è semplice.

3. Essendo $y_1 = y_2 + y_3$ si ha che il generico elemento di W è del tipo $(y_2 + y_3, y_2, y_3)$; allora una base del sottotspazio W è $\mathcal{B}' = \{(1,1,0);\ (1,0,1)\}$. Mediante la matrice A si calcolano le immagini $f(1,1,0) = (h-2,-1,h-1);\ f(1,0,1) = (-h,0,-h)$. E poiché le coordinate delle immagini soddisfano la relazione di definizione di W possiamo dire che la restrizione f' di f a W induce un endomorfismo $f' : W \to W$. Calcoliamo adesso la matrice associata ad f' rispetto alla base $\mathcal{B}'$.
Calcoliamo le componenti del generico vettore $(a,b,c) = x(1,1,0) + y(1,0,1)$. Si ha $\begin{cases} x+y = & a \\ x = & b \\ y = & c \end{cases}$. Per cui la matrice associata è $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ h-1 & -h \end{pmatrix}$. Gli autovalori sono $T_1 = -1;\ T_2 = -h$. La matrice caratteristica è $\begin{pmatrix} -1-T & 0 \\ h-1 & -h-T \end{pmatrix}$.
Per $h = -1$ abbiamo l' autovalore $T = -1$ doppio; la matrice A' è già diagonale.
Per $h \neq -1$, gli autovalori sono $T = -1$ e $T = -h$. L' autovettore associato a $T = -1$ si trova da $(h-1)x - (h-1)y = 0$, da cui $x = y$; e quindi si puo' prendere $(1,1)$. Per trovare un autovettore associato a $T = -h$ si trova $x = 0$ e y indeterminato; e quindi $(0,1)$. Per diagonalizzare A' basta prendere la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$
Si consideri il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione

$$(1-h)x^2 + (1-h)y^2 - 2(1+h)xy - 4\sqrt{2}(x-y) = 0.$$

1. Determinare le coniche spezzate, i punti base e la natura delle coniche del fascio, al variare del parametro h.
Provare che tutte le coniche del fascio hanno lo stesso centro di simmetria.

2. Detta γ l'iperbole equilatera del fascio, trovare una sua forma canonica e il cambiamento di coordinate che la determina.

3. Scrivere l' equazione del cilindro avente direttrice γ e generatrici parallele alla retta di equazioni $\begin{cases} x - y + z - 1 = & 0 \\ x + y - 2z = & 0 \end{cases}$.

Risoluzione

1. Scriviamo l' equazione nella forma

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4\sqrt{2}(x-y) - h(x^2 + y^2 + 2xy) = 0.$$

Si deducono subito le equazioni delle due coniche con cui è stato scritto il fascio. La seconda conica ha equazione $(x+y)^2 = 0$ e quindi è una conica spezzata nella retta $x + y = 0$ contata due volte (che è la seconda bisettrice). Anche la prima conica è spezzata. Basta risolvere l'equazione di secondo grado in x:

$$x^2 - 2(y + 2\sqrt{2})x + y^2 + 4\sqrt{2}y = 0.$$

Si ottiene $x = (y+2\sqrt{2}) \pm \sqrt{y^2 + 8 + 4\sqrt{2}y - y^2 - 4\sqrt{2}y}$, da cui si ottiene $x = (y+2\sqrt{2}) \pm 2\sqrt{2}$. La conica si spezza nelle due rette: $x = y$ e $x = y + 4\sqrt{2}$. Pertanto i punti base sono l' origine O delle coordinate, contato due volte e il punto $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ anch' esso contato due volte. Il nostro fascio di coniche è il fascio di coniche bitangenti alle rette $x = y$ e $x = y + 4\sqrt{2}$, nei punti base.

Scriviamo la matrice B della generica conica del fascio: $B = \begin{pmatrix} 1-h & -(1+h) & -2\sqrt{2} \\ -(1+h) & 1-h & 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Da cui si deduce $|B| = -32h$ e $|A| = -4h$.
Pertanto per $h \neq 0$ si hanno coniche irriducibili.
Per$h < 0$ si hanno ellissi.
Per $h > 0$ si hanno iperboli. Non ci sono parabole. Si ha una iperbole equilatera per $h = 1$ e la sua equazione è: $xy + \sqrt{2}(x - y = 0$.
Per trovare il centro di simmetria della generica conica del fascio si deve risolvere, per $h \neq 0$, il sistema

$$\begin{cases} (1-h)x - (1+h)y - 2\sqrt{2} & = 0 \\ -(1+h)x + (1-h)y + 2\sqrt{2} & = 0 \end{cases} .$$

Sommando membro a membro si ha $-2h(x + y) = 0$. Da cui $y = -x$ che sostituito nella prima equazione del sistema da' $x = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$. Quindi le coordinate del centro sono indipendenti da h.

2. Troviamo adesso una forma canonica dell' iperbole $xy + \sqrt{2}(x - y) = 0$. La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Si ha subito $|B| = -\frac{1}{2}$ e $|A| = -\frac{1}{4}$. La matrice caratteristica è $(A - TI) = \begin{pmatrix} -T & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -T \end{pmatrix}$. Gli autovalori di A sono $T_1 = \frac{1}{2}$ e $T_2 = -\frac{1}{2}$. La conica avrà forma canonica del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$. Mediante l' uso degli invarianti ortogonali si trova che $\gamma = -2$. Una forma canonica è data da: $\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 = -2$ e cioé $-\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} = 1$. Il centro di simmetria è dato da $C = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Gli assi di simmetria sono le rette passanti per il centro e parallele alle bisettrici. La matrice Q della rototraslazione è data da: $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. I parametri direttori della retta sono $(1, 3, 2)$. Detto $G = (\alpha, \beta, 0)$ il generico punto su γ esso dovrà soddisfare la condizione $\alpha\beta + \sqrt{2}(\alpha - \beta) = 0$. Le equazioni della retta per G parallela alla generatrice data sono $\frac{x-\alpha}{1} = \frac{y-\beta}{3} = \frac{z}{2}$. Da cui ricavando $\alpha = x - \frac{z}{2}$ e $\beta = y - \frac{3}{2}z$ e sostituendo nell' equazione di condizione si ottiene l' equazione del cilindro: $(x - \frac{z}{2})(y - \frac{3}{2}z) + \sqrt{2}(x - \frac{z}{2} - y + \frac{3}{2}z) = 0$.