UNIVERSITÀ DI CATANIA

# Facoltà di Ingegneria – Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in **Ingegneria** **Elettronica**

Prova scritta di ***Geometria***, assegnata il 2 - 12 - 2000

\- - - - -

Durata della prova: tre ore.

È consentito consultare solo i libri di testo.

Usare solo la carta fornita dal Dipartimento e **riconsegnare tutti** i fogli.

Non si può uscire dall'aula se non dopo la consegna **definitiva** del compito.

## I

Nello spazio è fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\{\, \mathrm{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \mathrm{u} \,\}$.

1\. – Studiare il fascio $\Phi$ di coniche passanti per O, $\mathrm{A} \equiv (-2, 2, 0, 1)$ ed aventi l'asse $\vec{y}$ come asse di simmetria.

2\. – Nella polarità piana definita ( nel piano $z = 0$ ) dalla generica conica $\gamma$ non degenere di $\Phi$ siano $r$, $s$ , rispettivamente, le polari di $Y_\infty$ e di $\mathrm{B} \equiv (1, 1, 0, 1)$.

Studiare il luogo $\Gamma$ dei punti $\mathrm{P} = r \cap s$ al variare di $\gamma \in \Phi$.

Si determinino l'equazione canonica di $\Gamma$ e le equazioni del cambio di coordinate nel caso in cui si assuma come asse $\vec{X}$ l'asse trasverso di $\Gamma$ .

3\. – Studiare le quadriche $\mathcal{Q}$ tali che:

- contengono la conica $\begin{cases} x^2 + (\lambda - 1)\, y^2 - 2\,\lambda\, y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ;
- la retta $l \;:\; 2x + y = t = 0$ e l'asse $\vec{z}$ sono tangenti a $\mathcal{Q}$ in $Z_\infty$ ;
- passano per $\mathrm{D} \equiv (2, 0, 1)$.

## II

1\. – In $\mathbb{R}^3$ euclideo si studi l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ assegnato mediante l'immagine del generico vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ :

$$f(x,y,z) = \Big( (a-1)x + ay \,,\; by + z \,,\; (a-1)x + ay + bz \Big).$$

Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ , determinare $Imf$ , $Kerf$ le relative equazioni cartesiane e darne l'interpretazione geometrica in $\mathbb{R}^3$ .

2\. – Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ tali che l'endomorfismo $f$ sia non iniettivo e semplice.

3\. – Posto $a = 0$, $b = 1$, $V = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; x + y + z = 0 \Big\}$ si determinino i due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ : $f(V)$ e $f^{-1}(V)$ .

4\. – Si determini il sottospazio $W = \Big( f(V) \cap f^{-1}(V) \Big)^\perp$ e si verichi che $\mathbb{R}^3 = V \oplus W^\perp$ .