FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria Elettronica**

Prova scritta di **Geometria I** assegnata il 4/10/01,

I

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u.$

1. Determinare e studiare il fascio di coniche ϕ del piano $z = 0$ tangenti alle rette $\begin{cases} z = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ e $\begin{cases} z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ nei punti in cui esse incontrano l'asse delle $\vec{y}$.

2. Determinare e studiare il fascio Φ di quadriche contenenti la generica conica del fascio ϕ, aventi i piani $x = 0$ e $y = 0$ come piani di simmetria e tali che il piano tangente in $(1, 1, 1)$ risulti parallelo all'asse delle $\vec{z}$.

3. Detto Q il cono di Φ studiare le sezioni piane di Q con i fasci di piani π_x, π_y e π_z contenenti rispettivamente gli assi $\vec{x}$, $\vec{y}$, e $\vec{z}$.

Risoluzione

1. Il fascio di coniche richiesto ha equazioni: $\begin{cases} z = 0 \\ \lambda x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$ Si tratta del fascio di coniche bitangenti alle rette date nei punti $B = (0, 1, 0)$ e $B' = (0, -1, 0)$.

2. La generica quadrica contenente $\begin{cases} z = 0 \\ \lambda x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ ha equazione

$$z(ax + by + cz + dt) + \lambda x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Perche' i piani $x = 0$ e $y = 0$ siano di simmetria per la quadrica deve accadere che l'equazione abbia solo potenze pari della x e della y. Pertanto nell' equazione dovra'essere $a = 0$ e $b = 0$. Dopo si impone il passaggio per il punto $(1, 1, 1)$. Dovra'essere $\lambda + c + d = 0$; infine si calcola l'equazione del piano tangente alla quadrica in $(1, 1, 1,)$. Tale equazione è

$$\lambda x + (c + \frac{d}{2})z + y + \frac{d}{2} - 1 = 0.$$

Perche' il piano tangente sia parallelo all'asse delle $\vec{z}$ dovranno mancare i termini in z. Pertanto dovra'essere $d = -2c$. In definitiva il fascio di coniche richiesto ha equazione

$$cx^2 + y^2 + cz^2 - 2cz - 1 = 0.$$

Il determinante della matrice B della quadrica è $|B| = -c^2(c + 1)$.
Si avranno punti **iperbolici** per $c < -1$
Si avranno punti **ellittici** per $c > -1$
Per $c = -1$ si avra'un cono.

3. Il cono trovato $x^2 - y^2 + z^2 - 2z + 1 = 0$ ha vertice nel punto $V = (0, 0, 1)$.
Quindi i piani del fascio π_z , contenendo il vertice, secano il cono in coniche spezzate.
I piani del fascio π_x, contenenti l'asse delle $\vec{x}$, secano il cono nei punti impropri

$$\begin{cases} t = 0 \\ y = \lambda z \\ x^2 + (1 - \lambda^2) z^2 = 0 \end{cases}$$

In conclusione per $\lambda = \pm 1$ si hanno **parabole**
per $\lambda < -1$ e $\lambda > 1$ si hanno **ellissi**.

Per $-1 < \lambda < 1$ si hanno **iperboli**. Cioe', in tal caso, otteniamo sezioni di tutti i tipi.

Resta da esaminare il caso delle sezioni coi piani del fascio π_y, contenenti l'asse delle $\vec{y}$. Si ha:

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = \lambda z \\ (\lambda^2 + 1) z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

In tale ultimo caso i piani del fascio secano sempre in iperboli, perche' si hanno sempre due punti impropri reali e distinti.

II

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} h-2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2-2h & h-2 & 2-h & -2 \\ -h & h & 1-h & -1 \end{pmatrix}$$

e i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (0,0,1,1)$ di $\mathbb{R}^4$.

1. Studiare, al variare di h, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata ad A rispetto alle basi canoniche, indicando in ogni caso una base del nucleo e dell'immagine. Trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $W \cap Im(f) = (0_V)$ per ogni h.

2. Detto $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$, provare che la restrizione f' a V induce un endomorfismo su V. Studiare la semplicità di f', al variare di h.

3. Calcolare, al variare di h, la controimmagine del sottospazio $Z \subset \mathbb{R}^4$ definito da $\begin{cases} y = 0 \\ x + z - t = 0 \\ hx + hz = 0 \end{cases}$

   sia per f che per f'.

Risoluzione

1. Riducendo per righe la matrice si ha

$$\begin{pmatrix} h-2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & h+2 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Il rango è sempre 2, per ogni h. Quindi la dimensione dell'immagine è sempre due ed anche la dimensione del nucleo. Una base dell'immagine si puo' ottenere prendendo la prima e la quarta colonna della matrice data che risultano sempre indipendenti. Per trovare il nucleo basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} (h-2)x + 2y - z + t = 0 \\ -2x + (h-2)y - hz = 0 \end{cases}$$

   Troviamo le equazioni cartesiane dell'immagine della applicazione f. Basta imporre che il rango della matrice seguente sia due.

Ricordiamo che le prima due righe sono rispettivamente la quarta e la prima colonna della matrice data A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ h-2 & 0 & 2-2h & -h \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

Riducendo per righe ed imponendo che il rango si mantenga due, si ottengono le equazioni cartesiane dell'immagine $\begin{cases} y = 0 \\ x + z - t = 0. \end{cases}$ Si deduce che una base dell'immagine puo'essere ottenuta da $(-z+t, 0, z, t)$. Per esempio $(-1, 0, 1, 0)$, e $(1, 0, 0, 1)$. Quindi lo spazio W ortogonale a $Im(f)$ risponde certamente alla richiesta. Quindi basta considerare $\begin{cases} -x + z = 0 \\ x + t = 0. \end{cases}$

2. Consideriamo i vettori $v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 10), v_3 = (0, 0, 1, 1)$. Essi generano V. Detto (a, b, c, d) un generico elemento di V, troviamo le sue componenti rispetto alla base v_1, v_2, v_3. Si ha

$$(a, b, c, d) = x(1, 1, 0, 0) + y(0, 1, 1, 0) + z(0, 0, 1, 1)$$

Dopo semplici calcoli si ha: $\begin{cases} x = a \\ y = b - a \\ z = d \end{cases}$.

E'anche facile vedere che l' equazione cartesiana che definisce V è: $x - y + z - t = 0$. Utilizzando la matrice si vede subito che $f(v_1) = (h, 0, -h, 0)$, $f(v_2) = (1, 0, 0, 1)$, $f(v_3) = (0, 0, -h, -h)$. Le immagini trovate soddisfano la relazione lineare omogenea che definisce V. Pertanto si conclude che la restrizione di f a V induce un endomorfismo f'. Per studiare la semplicita' di f' troviamo la matrice associata ad f' rispetto alla base v_1, v_2, v_3 di V. Si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ -h & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -h \end{pmatrix}$$

da cui si ha la matrice caratteristica

$$(A' - T) = \begin{pmatrix} h-T & 1 & 0 \\ -h & -1-T & 0 \\ 0 & 1 & -h-T \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono $T_1 = 0$; $T_2 = -h$; $T_3 = h - 1$. Evidentemente f' è semplice se gli autovalori sono tutti distinti. Esaminiamo i casi quando ci sono autovalori multipli.

- $T_1 = T_2 = h = 0$. La matrice caratteristica in tal caso è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Essa ha rango 1 e quindi in tal caso l'endomorfismo è semplice.
- Se $T_1 = T_3 = h - 1 = 0$. La matrice caratteristica in tal caso è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Essa ha rango 2 e quindi in tal caso l'endomorfismo non è semplice.
- $T_2 = T_3$. Cioe' $h = \frac{1}{2}$. Quindi $T_2 = -\frac{1}{2}$ doppio. Anche in tal caso il rango della matrice è 2 e l'endomorfismo non è semplice.

3. Studiamo la controimmagine di f. Si vede subito che per $h = 0$ il sottospazio Z è l'immagine della applicazione f; quindi la controimmagine è il dominio di f cioè tutto $\mathbb{R}^4$.
   Se invece $h \neq 0$ segue che Z è dato da $(x, 0, -x, 0)$. Per trovare la controimmagine in tal caso basta risolvere il sistema $A\underline{X} =^t (x, 0, -x, 0)$.
   Viene lasciato allo studente il calcolo per trovare la controimmagine di f'.