ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE (D)

D1

Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^{2,2}$ si consideri l'insieme

$$V = \left\{ X \in \mathbf{R}^{2,2} \mid XA = AX,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

delle matrici che commutano con A. Verificare che V è un sottospazio e determinarne una base. Verifiare che $V = \mathcal{L}(I_2, A)$.

D2

Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^{3,3}$ si considerino il sottospazio V delle matrici simmetriche e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare che il sottoisieme $W = \{X \in V \mid AX \text{ è simmetrica } \}$ è un sottospazio e determinarne una base. Verificare he gli elementi di W commutano con A.

D3

Si considerino in $\mathbf{R}^{2,2}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il sottospazio $V = \mathcal{L}(I_2,\ A,\ A^2)$. Determinare una base di V. verificare che V è chiuso rispetto al prodotto di matrici.

D4

È assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2,2}$$

Verificare che l'insieme $V = \{X \in \mathbf{R}^{2,2} \mid XA \text{ ed } AX \text{ sono simmetriche } \}$ è un sottospazio. Esplicitare le coppie (Δ_1, Δ_2) tali che esista una matrice $X \in V$ per cui $AX = \Delta_1,\ XA = \Delta_2$.

D5

Sia $A \in \mathbf{R}^{n,n}$ una matrice generica. Dire come bisogna scegliere i parametri h e k affinché la matrice $hA + k\,{}^tA$ risulti simmetrica.

D6

Sia V un k-spazio vettoriale e siano $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$. Provare che

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathcal{L}(v_1 + v_3, v_2 + v_4, v_1 + v_4, v_1 - v_4)$$

D7

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2,2}$$

Determinare una base del sottospazio $\mathcal{L}(I_3, A, A^2, A^3, \ldots)$.

D8

Siano V un k-spazio vettoriale, $U \subset V$ un sottospazio e $v \in V$ un vettore fissato. Determinare condizioni necessarie e sufficienti perché

$$v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

sia un sottospazio.

D9

Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[x]$ dei polinomi di grado ≤ 3 nella variabile x, si consideri il sottoinsieme

$$P = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(1) = p(-1) = 0\}$$

Verificare che P è un sottospazio e determinarne una base.

D10

Sia V un k-spazio vettoriale e siano U, W due suoi sttospazi tali che $U \subseteq W$ e che $dim\, U = dim\, W - 2$. Caratterizzare i sottospazi T di V tali che $U \subseteq T \subseteq W$.

D11

Sono assegnati in $\mathbf{R}^4$ i sotospazi

$$V = \mathcal{L}\left((1,2,4,1),(1,0,0,1),(2,1,2,2)\right),\ W = \mathcal{L}\left((1,3,1,3),(0,1,0,1),(1,1,1,1)\right)$$

Determinare i vettori $v \in V$, $w \in W$ tali che $v + w = e_1$. Verificare che v e w sono univocamente determinati.

D12

Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^5$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1,0,1,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,1,0)$, $v_3 = (1,1,1,1,1)$. Nello spazio vettoriale (rispetto alle operazioni naturali)

$$V = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 \mid a_i \in \mathbf{R}$$

dei polinomi lineari omogenei in cinque variabili ed a coefficienti reali, si consideri il sottoinsieme

$$T = \{p(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in V \mid p(v_i) = 0,\ i = 1,2,3\}$$

Verificare che T è un sottospazio e determinarne una base.

D13

Determinare due sottospazi $V, W \subseteq \mathbf{R}^4$ tali che $V + W = \mathbf{R}^4$ e che $V \cap W = \{(x,y,z,t) \mid x - y = y + z = x - z + t = 0\}$. Determinare due coppie di vettori $v \in V$, $w \in W$ tali che $v + w = e_2$.

D14

Si consideri in $\mathbf{R}^3$ il sottospazio $V = \{(x,y,z) \mid x - y + z = 0\}$. Verificare che il sottoinsieme di $\mathbf{R}^{3,3}$

$$T = \{A \in \mathbf{R}^{3,3} \mid A^t v = 0\ \forall v \in V\}$$

è un sottospazio e determinarne una base.

D15

Siano $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ un polinomio in x a coefficienti reali, $\lambda \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}_0$ e $d : \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}[x]$ l'usuale derivazione. Verificare (usando l'induzione su n) che sono equivalenti i seguenti asserti

1) $P(\lambda) = (dP(x))_{x=\lambda} = \ldots = (d^{n-1}P(x))_{x=\lambda} = 0$;
2) esiste un polinomio $Q(x)$ tale che $P(x) = (x-\lambda)^n Q(x)$.

D16

Sia $d:\ \mathbf{R}_4[x] \longrightarrow \mathbf{R}_4[x]$ l'usuale derivazione. Verificare che il sottoinsieme di $\mathbf{R}_4[x]$

$$V = \{p(x) \in \mathbf{R}_4[x] \mid p(-1) = (dp(x))_{x=-1} = 0\}$$

è un sottospazio e determinarne una base.

D17

È assegnato nel piano un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x}\vec{y}.u$. Sia **r** una retta la cui equazione abbia coefficienti complessi. Verificare che **r** contiene almeno un punto, eventualmente improprio, a coordinate reali. È vera la stessa proprietà per le coniche?

D18

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z}.u$. Sia **r** una retta le cui equazioni abbiano coefficienti complessi.
1) Verificare che non necessariamente **r** contiene punti reali.
2) Verificare che le seguenti asserzioni sono equivalenti

α) **r** contiene punti a coordinate reali;
β) **r** giace su un piano la cui equazione ha coefficienti reali.

D19

Sono assegnati la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ed il sottospazio

$$V = \mathcal{L}(I_2, A, A^2, \ldots) \subseteq \mathbf{R}^{2,2}$$

Determinare un sottospazio $W \subseteq \mathbf{R}^{2,2}$ tale che $V \oplus W = \mathbf{R}^{2,2}$.

D20

Determinare l'endomorfismo $\varphi:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $\varphi(2,3) = (1,1)$ e che $\varphi^2 = -i$ (dove $i:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è l'identità). Trovare la matrice associata a φ rispetto alla base canonica. Verificare che non esiste un endomorfismo $\psi:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $\psi(2,3) = (1,1)$ e che $\psi^2 = -i$.

D21

Determinare due applicazioni lineari $f, g:\ \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ tali che

$$Ker\, f = Ker\, g = \{(x,y,z,t) \mid 2x - 2y + 2z + 5t = x - y + z + 2t = 0\}$$

e

$$Im\, f = Im\, g = \{(x,y,z,) \mid x + 2y = 0\}$$

D22

Determiare l'endomorfismo $\varphi:\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$\varphi(1,1,0) = (1,1,1)$$

$$\varphi^2(1,1,0) = (0,1,1)$$

$$\varphi^3 = -i$$

dove $i:\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è l'identità.

D23

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

Verificare che f è semplice, determinare i suoi autospazi e determinare una matrice P per cui $P^{-1}AP$ risulta diagonale.

D24

Si identfichi lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ con lo spazio ordinario in cui è fissato un sistema di riferimento $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u$. Studiare l'endomorfismo $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$\varphi(v) = 2v' + \bar{v}$$

dove v' è la proiezione ortogonale di v sul piano $z = 0$ e $\bar{v}$ è il simmetrico di v rispetto al piano $x - y = 0$. Verificare che φ è semplice e determinare i suoi autospazi, interpretando geometricamente i risultati ottenuti.

D25

Dire per quali valori del parametro reale h esiste ed è unico l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$f(0,1,1) = (1,1,0)$
$f^2 = 4i$ dove i è l'identità
$(2h-1, 1, h)$ è autovettore rispetto all'autovalore 2.

Determinare gli autospazi di f. Cosa si può dire per i valori di h per i quali f non è unico?

D26

Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il generico endomorfismo tale che $\dim Ker\, f = 1$ e che

$f(1,0,1) = (0,1,0)$
$f(0,1,0) = (1,0,1)$

1) Verificare che f è semplice e determinare i suoi autospazi.
2) Caratterizzare i vettori di $\mathbf{R}^3$ che appartengono al nucleo di qualche f.

D27

Determinare le matrici $X \in \mathbf{R}^{3,3}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (X - I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D28

Determinare un endomorfismo $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $Im\, f = \mathcal{L}(2,1,1,1)$ e che $\varphi^2 = 0$. Detta $A = M(\varphi)$ la matrice associata a φ rispetto alla base canonica, calcolare A^{317}.

D29

Si considerino gli endomorfismi $i, d : \mathbf{R}_3[x] \to \mathbf{R}_3[x]$ dati rispettivamente dall'identità e dalla derivazione. Calcolare gli autospazi dell'endomorfismo $\varphi : \mathbf{R}_3[x] \to \mathbf{R}_3[x]$ definito da

$$\varphi = d^3 - hd^2 + d + hi \quad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

Determinare i valori di h per cui φ risulta invertibile; Per questi valori di h determinare i parametri reali a, b, c, d per cui si ha

$$\varphi^{-1} = ad^3 + bd^2 + cd + di$$

D30

Siano V un k-spazio vettoriale e $f : V \to V$ un endomorfismo. Provare che sono equivalenti gli asserti

1) $f^2 = 0$
2) $Im\, f \subseteq Ker\, f$

D31

Determinare gli endomorfismi invertibili $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tali che $f = f^{-1}$ e che $f(0,1,0) = (0,0,1)$. Verificare che essi sono semplici.

D32

Si dica per quali matrici $A \in \mathbf{R}^{n,n}$ l'equazione matriciale $AX = A + I_n$ è risolubile. Per tali matrici A la si risolva.

D33

Si dica se il seguente enunciato è vero o falso:
date comunque due matrici $A, B \in \mathbf{R}^{2,2}$ si ha $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

D34

Sono assegnate in $\mathbf{R}^{3,3}$, mediante le loro colonne, le matrici

$$A = (C_1, C_2, C_3), \quad B = (C_2 + 2C_3, 2C_1 + C_3, C_1, +2C_2)$$

Si determini una matrice T tale che $B = AT$. Verificare che A e B hanno lo stesso rango.

D35

Dire per quali valori del parametro reale h le relazioni

$$\begin{array}{l} f(1,h,1) = (2-h, h, 1) \\ f(h+1, 0, 1) = (2, 1, 1) \\ f(h+2, 1, 2h) = (2+h, 2, h+1) \end{array}$$

definiscono un unico endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Precisare per quali valori di h non esiste nessun endomorfismo compatibile con queste relazioni e per quali valori ne esistono infiniti.

D36

Dire per quali valori del parametro reale h le relazioni

$$\begin{array}{l} f(1,h,1) = (2, 0, -h) \\ f(h-1, 1, 1) = (-h, 2, 1) \\ f(1, 2, h+1) = (h, 2, h-1) \end{array}$$

definiscono un unico endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Cosa può dirsi su f per gli altri valori di h? Si ponga $h = 1$. Determinare uno degli f, diciamolo f', una base $\mathcal{A}$ del dominio ed una base $\mathcal{B}$ del codominio in modo tale che risulti

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D37

Determinare una applicazione lineare $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ tale che:

$$(1,1,0,1), (0,1,1,1), (2,1,-1,1) \in Im\, f \quad (1,1,1) \in Ker\, f$$

Scrivere la matrice $M(\varphi)$ associata a φ rispetto alle basi canoniche.

D38

È assegnato in $\mathbf{R}^4$ il sottospazio

$$V = \{(x, y, z, t) \mid x + y + t = z - t = 0\}$$

Determinare un endomorfismo $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $Im\,\varphi = Ker\,\varphi = V$ e determinare la matrice associata a φ rispetto alla base canonica.
Verificare che gli endomorfismi che soddisfano le condizioni assegnate non possono essere semplici.

D39

Determinare il generico endomorfismo $\psi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $\psi(1, 0, 1) = (0, 1, 0)$ e $\psi(1, 1, 0) = (1, 0, 1)$. Caratterizzare gli endomorfismi ψ che sono isomorfismi e quello, ψ‘, tale che $(1, 1, 1) \in Ker\,\psi$‘.

D40

Studiare l'endomorfismo $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ associato alla matrice

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & h \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

con h parametro reale. Determinare i valori di h per cui φ risulta semplice.
Per il valore di h per cui φ ammette l'autovalore 1 con molteplicità 2 determinare una base di autovettori.

D41

Determinare l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ avente l'autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità 2 e

$$Ker\,f = \{(x, y, z) \mid x - y = y + z = 0\}, \quad Im\,f = \{(x, y, z) \mid 2x - y - z = 0\}$$

D42

Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un endomorfismo, non nullo e distinto dall'identità, tale che $f \circ f = f$. Verificare che:
1) f non è un isomofismo;
2) f può ammettere solo gli autovalori 0 e 1. Verificare che 0 è autovalore per ognuno di questi endomorfismi;
3) Verificare che nel caso $n = 2$ f deve avere gli autovalori 0 e 1.

D43

Determinare il generico endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$V = Ker\,f = \{(x, y, z) \mid x - y + 2z = 0\}, \quad W = Im\,f = \{(x, y, z) \mid x - y = 2z - x = 0\}$$

scrivendo la matrice associata ad f rispetto alla base canonica. Discutere la semplicità di f.

D44

Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'endomorfismo associato alla matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -12 & 10 \end{pmatrix}$$

1) Determinare gli autovalori e gli autovettori di f.
2) Provare che $V = \{g \in L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2) \mid f \circ g = g \circ f\}$ è un sottospazio e trovarne una base.
3) Provare che gli elementi di V hanno gli stessi autovettori di f.

D45

Si considerino in $\mathbf{R}^3$ i sottospazi $V = \{(x,y,z) \mid z = 0\}$, $W = \{(x,y,z) \mid x = y = z\}$. Verificare che $\mathbf{R}^3 = V \oplus W$ e determinare l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$f \circ f = f, \quad Ker\, f = V, \quad Im\, f = W$$

Sia $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un altro endomorfismo tale che $g(V) \subseteq V$, $g(W) \subseteq W$. Verificare che $g \circ f = f \circ g$.

D46

È assegnato in $\mathbf{R}^4$ il sottospazio $V = \{(x,y,z,t) \mid x - y = x - z + t = 0\}$.
1) Determinare il generico endomorfismo $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $Im\, f = Ker\, f = V$.
2) Tra gli endomorfismi trovati determinare quello, φ', tale che

$$\varphi'(1,0,0,0) = (1,1,0,-1), \quad \varphi'(1,0,1,0) = (1,1,1,0)$$

3) Determinare gli autospazi di φ'.

D47

Determinare il generico endomorfismo $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfacente le condizioni:

1) $(1,1,1) \in Ker\, \varphi$;
2) $(2,1,1)$ è autovettore rispetto all'autovalore -1;
3) $Im\, f = \{(x,,y,z) \mid x - y - z = 0\}$;
4) -2 è autovalore.

Verificare che questi endomorfismi sono tutti semplici e determinare una base di autovettori.

D48

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ mediante le relazioni

$$f(1,1,1) = (2,0,0),\ f(0,1,-1) = (1,1,0),\ f(1,0,1) = (1,-1,0)$$

1) Determinare una base $\mathcal{A}$ del dominio ed una base $\mathcal{B}$ del codominio in modo che risulti

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Dire se f è semplice.

D49

Sono assegnati in $\mathbf{R}^3$ i vettori $v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (2,0,1)$, $w_1 = (1,0,1)$, $w_2 = (0,1,0)$. Si considerino i sottospazi $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$, $W = \mathcal{L}(w_1, w_2)$ e le applicazioni lineari $f : V \to \mathbf{R}^3$, $g : W \to \mathbf{R}^3$ definite dalle relazioni

$$f(v_1 = (-2, h-1, -3), \quad f(v_2 = (1, -h, h+1)$$

$$g(w_1 = (h+1, 1, 0), \quad g(w_2 = (3, h+3, 3)$$

con h parametr reale. Determinare il valore di h per cui f e g determinano un endomorfismo $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Dire se φ è semplice e, in caso affermativo, determinare una base di autovettori.

D50

Determinare il valore del parametro reale h in modo che esista un endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfacente le seguenti condizioni

$$f(1,2,1) = (2h, h + \frac{3}{2}, 1),\ f(1,1,1) = (h, 1, -h),\ f(1,0,1) = (0, h - \frac{1}{2}, -2), (-1,1,1) \in Ker\, f$$

Verificare che f è semplice.

D51

È assegnata l'applicazione lineare $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ mediante le relazioni

$$\varphi(1,-1,1) = (1, h-1, 2-h),\ \varphi(-1,1,0) = (0, 1-h, h-1),\ \varphi(1,1,0) = (2h, h+1, h+3)$$

con h parametro reale. Determinare la matrice associata a φ rispetto alla base canonica e studiare φ al variare di h. Nel caso $h = 1$ determinare due basi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D52

È assegnata l'applicazione lineare $\varphi : \mathbf{R}^{2,2} \to \mathbf{R}^{2,2}$ definita da

$$\varphi(A) = A +^t A$$

1) Calcolare $Im\,\varphi$ e $Ker\,\varphi$;
2) provare che φ è semplice;
3) verificare che ogni matrice $A \in \mathbf{R}^{2,2}$ si può scrivere $A = B + C$ con $B \in Ker\,\varphi$, $C \in Im\,\varphi$.

D53

Determinare l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che: $v_1 = (1,0,1)$ sia autovettore rispetto all'autovalore 2, $v_2 = (1,1,1)$ sia autovettore rispetto all'autovalore -1, $v_3 = (1,2,0)$ sia autovettore rispetto all'autovalore 1. Determinare la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica.
Determinare due basi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tali che $M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D54

Si vuole determinare un endomorfismo $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $(1,h,1)$ sia autovettore rispetto all'autovalore 1, $(h,1,0)$ sia autovettore rispetto all'autovalore -1, $(2,2,1) \in Ker\,\varphi$, con h parametro reale.

1) Per quali valore di h l'endomorfismo φ è determinato?
2) Verificare che quando φ è determinato, lo è univocamente. Verificare che i questo caso φ è semplice.

D55

Si considerino le basi di $\mathbf{R}^3$

$$\mathcal{A} = [(1,1,0,),\ (1,0,1),\ (0,1,1)], \quad \mathcal{B} = [(2,1,1),\ (-1,0,-1),\ (1,1,2)]$$

e l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ associato alla matrice

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Verificare che f è semplice e determinare una base di autovettori.
2) Determinare la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica.

D56

Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il generico endomorfismo per il quale $(1,1,1)$ è autovettore rispetto all'autovalore 0 e $f(1,0,1) = (2,1,0)$. Determinare la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica. Caratterizzare gli endomorfismi f tali che $\dim Ker\,f = 2$. Tra le f per le quali $\dim Ker\,f = 1$, caratterizzare quelle per cui $Ker\,f \oplus Im\,f = \mathbf{R}^3$.

D57

Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_2[x]$ dei polinomi di grado ≤ 2 nella variabile x ed a coefficienti reali si considerino i polinomi

$$p_1 = (1+h) + x - hx^2,\ p_2 = hx + hx^2,\ p_3 = 4x + (h+1)x^2$$

con h parametro reale.

1) Determinare i valori di h per cui $\mathcal{A} = [p_1, p_2, p_3]$ è una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
2) Sia $f : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x]$ l'endomorfismo definito dalle relazioni:

$$f(1) = p_2, \quad f(x) = p_3, \quad f(x^2) = p_1$$

Determinare i valori di h per cui $1 + h + 2x + 3x^2 \notin Im\, f$
3) Si consideri la base standard $\mathcal{C} = [1, x, x^2]$; Dire per quale lalore di h la matrice $M^{\mathcal{C}}(f)$ è simile alla mtrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

D58

Si consideri l'endomorfismo $\varphi : \mathbf{R}_2[x]| \to \mathbf{R}_2[x]$ definito da

$$\varphi(p(x)) = p(hx+1) \quad p(x) \in \mathbf{R}_2[x], \quad h \in \mathbf{R}$$

Determiare, al variare di h, gli autospazi di φ.

D59

Si determini il generico endomorfismo $\psi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ per il quale $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ siano autovettoriappartenenti allo stesso autospazio V_λ e inoltre risulti $(1,1,1) \in Ker\, \psi$. Studiare questo endomorfismo al variare del parametro reale λ. Cosa si può dire sulla semplicità di ψ?

D60

Si determini il generico endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $V_2 = \{(x,y,z) \mid x - y - z = 0\}$ sia l'autspazio associato all'autovalore 2, $V_{-1} = \mathcal{L}(-1, 0, h)$ sia l'autospazio associato all'autvalore -1, con h parametro reale. Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica. Verificare che f è un isomorfismo per ogni h e determinare l'endomorfismo $f^{-1} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

D61

Si consideri l'endomorfismo $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ associato alla matrice

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} h-1 & h & 1-2h & h-1 \\ h & 1 & -1-h & h \\ h & 1 & -1-h & h \\ 1 & 1-h & h-2 & 1 \end{pmatrix}$$

con h parametro reale.
1) Determinare i valori di h per i quali risulta $Im\, \varphi = Ker\, \varphi$.
2) Nel caso $h = 0$ determinare gli autospazi di φ.

D62

Si identifichi lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$ col piano in cui è fissato un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x}, \vec{y}.u$. Si considerino gli endomorfismi $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ così definiti: φ è la rotazione in senso antiorario di $\frac{\pi}{2}$, ψ è la proiezione ortogonale sulla retta $x + y = 0$.

1) Completare φ e ψ ad una base, $\mathcal{A}$ di $L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$
2) Determinare le componenti rispetto ad $\mathcal{A}$ dell'applicazione identica $i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

D63

Si identifichi lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$ col piano in cui è fissato un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x},\vec{y}.u$. Si considerino gli endomorfismi $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ così definiti: f è la rotazione in senso antiorario di $\frac{\pi}{4}$, ψ è la proiezione ortogonale sulla retta $x - y = 0$.

1) Studiare l'endomorfismo $\varphi_h = f + hg$ al variare del parametro reale h.
2) Determinare i valori di h per cui φ_h è semplice.
3) completare f e g ad una base di $L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$.

D64

Caratterizzare gli endomorfismi $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tali che $f \circ f = f$. Verificare che, tranne l'identità di $\mathbf{R}^2$, nessuno di questi endmorfismi è un isomorfismo. Verificare che questi endomorfismi sono tutti semplici, e determinarmi gli autospazi.

D65

È assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a-1 \\ -a+b & b & -2a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Dire per quali valori dei parametri reali a, b, c, A è diagonalizzabile. Per questi valori determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.