FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Informatica e Industriale

Prova scritta di di **Algebra lineare e Geometria** assegnata il 7/7/03

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (hx + y - z, x + hy + z, -x + y + hz)$$

1. Studiare f, al variare di h, determinando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
2. Studiare, al variare di h, la semplicità di f e determinare, ove possibile, una base di autovettori.
   {Se si ha difficoltà nel calcolo delle radici del polinomio caratteristico si può tenere conto che gli autovalori sono $T = h + 1, m = 2;\quad T = h - 2, m = 1$}.
3. Per $h = 0$ diagonalizzare la matrice $A = M^{E,E}(f)$, dove E è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Indicare la matrice diagonalizzante P.

Risoluzione

1. La matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche é $\begin{pmatrix} h & 1 & -1 \\ 1 & h & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$. Se si fanno le sostituzioni sulle righe: $R_2 \leftrightarrow R_2 - hR_1$ e $R_3 \leftrightarrow R_3 - R_1$, la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} h & 1 & -1 \\ 1-h^2 & 0 & 1+h \\ -1-h & 0 & 1+h \end{pmatrix}.$$

Se $h + 1 = 0$, si ha $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. In tal caso la $dimIm(f) = 1$ e la $dimKer(f) = 2$. Per esempio $(1, -1, 1)$ è una base dell'immagine, mentre dall'equazione $-x + y - z = 0$ si determina una base del nucleo, per esempio $(1, 1, 0);\ (0, 1, 1)$.
Se invece $h + 1 \neq 0$, riprendendo la matrice, sottrendo dalla terza la seconda riga si ha la matrice ridotta

$$\begin{pmatrix} h & 1 & -1 \\ 1-h^2 & 0 & 1+h \\ h^2-h-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In conclusione se $h^2 - h - 2 = 0$, il rango diventa 2. Ora $h^2 - h - 2 = 0$ per $h = -1, h = 2$. Il caso $h = -1$ non si considera, perchè già considerato, e quindi si ha il caso $h = 2$.

Dal sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$ si trova una base del nucleo;con seplici calcoli si trova $(1, -1, 1)$. Mentre dalla matrice data ponendo $h = 2$ e prendendo le ultime due colonne si trova una base dell'immagine. Si prenda $(1, 2, 1);\ (-1, 1, 2)$.

Infine per $h \neq -1, 2$ la matrice ha rango 3 e quindi si ha un isomorfismo.

2. La matrice associata ad f, rispetto alle basi canoniche, è, come abbiamo visto, $\begin{pmatrix} h & 1 & -1 \\ 1 & h & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$.

Come si vede subito, la matrice è simmetrica reale e, per il teorema spettrale, l'endomorfismo è sempre semplice.

Dovendo trovare una base di autovettori, bisogna trovare il polinomio caratteristico e calcolare gli autovalori. La matrice caratteristica è $\begin{pmatrix} h-T & 1 & -1 \\ 1 & h-T & 1 \\ -1 & 1 & h-T \end{pmatrix}$. Calcolando il polinomio caratteristico si ha: $(h-T)^3 - 2 - 3(h-T) = 0$. Ponendo $h - T = S$ si ha $S^3 - 2 - 3S = 0$. Il polinomio si annulla per $S = -1$. Abbassando di grado con Ruffini si trovano le altre due radici $S = 2$ e $S = -1$. Quindi gli autovalori sono $h-T = -1, m = 2$ ed $h - T = 2, m = 1$, cioé $T = h + 1$ doppio, ed $T = h - 2$.

Dalla matrice caratteristica, ponendo $T = h + 1$, si trova $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Quindi l'autospazio V_{h+1} si trova da $x - y + z = 0$. Si hanno gli autovettori $(1, 1, 0)$; $(0, 1, 1)$.

Dalla matrice caratteristica ponendo $T = h - 2$ si ha la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. L'autospazio V_{h-2} ha base $(1, -1, 1)$. C'è da notare che gli autovettori sono indipendenti da h.

3. Per diagonalizzare la matrice che si ottiene per $h = 0$, si possono quindi prendere gli autovettori sopra considerati. In tale caso particolare gli autovalori sono $T = 1$ doppio e $T = -2$. La matrice diagonalizzante è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Quindi si ha

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.

Si consideri il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione

$$x^2 + (k-1)y^2 - 2x + (2-k)y = 0$$

1. Determinare i punti base e le coniche spezzate del fascio.
2. Indicare, al variare di k, le coniche del fascio.
3. Detta $\wp$ la parabola del fascio, studiare le quadriche contenenti $\wp$, aventi in O piano tangente $2x-y+z = 0$ e che sono secate dal piano $x = 0$ nella conica $\begin{cases} x = 0 \\ z^2 + y - z = 0 \end{cases}$

Risoluzione

1. I punti base di un fascio si trovano come punti comuni a due qualunque coniche del fascio. L'equazione del fascio si può scrivere: $x^2 - y^2 - 2(x - y) + k(y^2 - y) = 0$. Una conica riducibile del fascio è quella spezzata nelle rette $y = 0$ e $y = 1$. Interesechiamo tali rette con $x^2 - y^2 - 2(x - y) = 0$. Allora si ha $y = 0$; $x^2 - 2x = 0$. Quindi i punti $O = (0, 0)$ e $(2, 0)$ sono base. Risolvendo il sistema $y = 1$; $x^2 - 2x + 1 = 0$ si ha il punto $(1, 1)$ che è base e deve essere contato due volte. La matrice della conica è $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k-1 & \frac{2-k}{2} \\ -1 & \frac{2-k}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Il determinante $|B| = -\frac{k^2}{4}$. Quindi le coniche spezzate si ottengono per $k = 0$. Bisogna ricordare che avendo scritto l'equazione del fascio con un solo parametro, dobbiamo considerare la conica la cui equazione è a fattore del parametro. Quindi l'altra conica spezzata è quella la cui equazione è $y^2 - y = 0$; e questa deve essere contata due volte nel computo delle coniche spezzate.

2. Consideriamo il determinante della sottomatrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix}$.
   Quindi per $|A| = k - 1 > 0$, per $k > 1$, si hanno ellissi.
   $|A| = k - 1 < 0$, per $k < 1$, si hanno iperboli.
   Per $k = 1$ si ha una parabola. La parabola $\wp$ nel sistema $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$ ha equazioni $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 - 2x + y = 0 \end{cases}$.

3. La generica quadrica contenente $\wp$ ha equazione

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 - 2x + y = 0$$

Tutte queste quadriche passano per O, perchè manca il termine noto e l'equazione del piano tangente nell'origine si ottiene eguagliando a zero il complesso dei termini di primo grado, oppure applicando la formula che da' l'equazione del piano tangente in un punto. Allora si ha $dz - 2x + y = 0$. Quindi dev'essere $d = -1$. Sechiamo la generica quadrica col piano $x = 0$. si ha il sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ z(ax + by + cz - 1) + x^2 - 2x + y = 0 \end{cases}$$

Per avere la conica sezione richiesta dev'essere $b = 0;\ c = 1$.
In definitiva si ha il fascio di quadriche richiesto

$$z(ax + z - 1) + x^2 - 2x + y = 0.$$

La matrice discriminante B della quadrica è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che:
$|B| = \frac{a^2-4}{16}$. Inoltre $|A| = 0$, per ogni a.
Quindi si hanno cilindri per $a = \pm 2$.
Per $a < -2, a > 2$ si hanno paraboloidi iperbolici.
Per $-2 < a < 2$ si hanno paraboloidi ellittici.