FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria Elettronica-Nuovo ordinamento**

Compito assegnato il 19/06/02

I

Sia data la amtrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1+k \\ 0 & 2 & 0 \\ 1+k & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Dire per quali valori di k le righe della matrice formano una base per $\mathbb{R}^3$.
2. Studiare l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice A, indicando in ogni caso una base di $Ker(f)$ e di $Im(f)$.
3. Studiare, al variare di k, la semplicità dell'endomorfismo f e nei casi in cui f è semplice diagonalizzare la matrice A.

Risoluzione

1. Le righe della matrice sono linearmente indipendenti quando il rango è massimo e quindi quando il detterminente della matrice è diverso da zero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1+k \\ 0 & 2 & 0 \\ 1+k & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2[4-(1+k)^2] = 0$$

   per $1+k=2 \Rightarrow k=1$ e per $1+k=-2 \Rightarrow k=-3$.
   In definitiva le righe sono indipendenti per $k \neq 1, -3$.

2. Poichè per $k \neq 1, -3$ il rango della matrice è tre, possiamo dire che la nostra applicazione è un **isomorfismo**.
   Per $k=1$ la matrice è $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ che ridotta diventa $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. In tal caso il rango è due e quindi la dimensione dell'immagine è due. Come è noto una base dell'immagine si trova prendendo nella matrice data $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ due colonne indipendenti. Per esempio la prima e la seconda. Il nucleo si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo costruito sulla matrice ridotta $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi $Ker(f) = \begin{cases} y=0 \\ x=-z \end{cases}$.
   Per $k=-3$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, che ridotta per righe diventa $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Il rango è due e la dimensione dell'immagine è due. Il nucleo in tal caso si trova dal sistema $\begin{cases} y=0 \\ x=z \end{cases}$.

3. Il polinomio caratteristico si trova calcolando il determinante

$$\left| \begin{pmatrix} 2-T & 1 & 1+k \\ 0 & 2-T & 0 \\ 1+k & 1 & 2-T \end{pmatrix} \right| = 0$$

Sviluppiamo il determinante, applicando il teorema di Laplace alla seconda riga della matrice si trovano gli autovalori: essi sono $T_1 = 2$, $T_2 = 1 - k$, $T_3 = 3 + k$.
L'endomorfismo è certamente semplice se gli autovalori sono reali e distinti, e ciò accade per $k \neq -1$.
Affrontiamo il caso che gli autovalori possano avere delle molteplicità.
1-Per $T_1 = T_2 \Longrightarrow 2 = 1 - k \Longrightarrow k = -1$. Segue anche che $T_3 = 2$. Quindi l'autovalore è triplo. La matrice caratteristica in tal caso diventa $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il suo rango è uno e quindi la dimensione dell'autospazio V_2 è due. L'endomorfismo non è semplice.
2- Analogamente per $3 + k = 2 \Longrightarrow k = -1$ e si ottiene di nuovo il caso trattato precedentemente.
3-Anche per $T_2 = T_3 \Longrightarrow 1 - k = 3 + k \Longrightarrow k = -1$. Si ritorna di nuovo al caso già trattato.
In conclusione l'endomorfismo è semplice solo per $k \neq -1$.

Per diagonalizzare la matrice A bisogna trovare gli autospazi associati agli autovettori T_1, T_2, T_3.
Per $T = 2$ la matrice caratteristica diventa $(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+k \\ 0 & 0 & 0 \\ 1+k & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Per trovare gli autovettori associati a $T = 2$ si deve risolvere il sistema lineare omogeneo $(A - 2I)\underline{X} = \underline{0}$. Si trova subito $x = -\frac{-y}{1+k}, z = \frac{-y}{1+k}$ Quindi come autovettore associato a $T = 2$ prendiamo $(1, -(1 + k), 1)$.
Procedendo analogamente con gli autovalori $T = 1 - k, T = 3 + k$ si trovano rispettivamente gli autovettori: $(1, 0, -1)$ e $(1, 0, 1)$. In definitiva la matrice diagonalizzante è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(1+k) & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}.u$.
Siano r ed s le rette di $\mathbb{R}^3$ definite rispettivamenete dai sistemi

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 + kt \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2ky - z - 4k - 1 = 0 \end{cases}$$

1. Si dica quando, al variare di k, le rette sono sghembe, incidenti o parallele.

2. Per $k = 1$ trovare, se esiste, un piano π ortogonale ad r ed s.

Risoluzione

1. Dalla teoria è noto che perchè due rette siano complanari è che il determinante della matrice 4×4 formata con i loro coefficienti dev' essere uguale a zero. Ci si riferisce sempre alle equazioni delle due rette come intersezioni di due piani.
   Nel nostro caso dopo avere scritto le equazioni di r come intersezione di due piani si ha: r : $\begin{cases} kx - y + 3 + 2k = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$. Si deve calcolare il determinante: $\left| \begin{pmatrix} k & -1 & 0 & 3+2k \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2k & -1 & -4k-1 \end{pmatrix} \right|$.

Sottraendo dalla quarta la seconda riga si deve calcolare il determinante: $\left|\begin{pmatrix} k & -1 & 0 & 3+2k \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2k & 0 & -4k-4 \end{pmatrix}\right|$; applichiamo il Teorema di Laplace alla terza colonna e si calcola il determinante: $\left|\begin{pmatrix} k & -1 & 3+2k \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2k & -4k-4 \end{pmatrix}\right|$. È facile vedere che $|A| = (3K^2 + k - 4)$
Si conclude che per $k = 1$ e $k = -\frac{4}{3}$ le rette r ed s sono complanari.
Nel primo caso sono anche parallele perchè hanno gli stessi parametri direttori $(1, 1, 2)$.

2. Per $k = 1$ esiste il piano ortogonale ad entrambe le rette ed è il piano di equazione $x + y + 2z = 0$, perchè sappiamo che i coefficienti del piano sono parametri direttori di un vettore normale al piano.

III

Ridurre a forma canonica la conica di equazione

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 - 2 = 0$$

indicando il cambiamento di coordinate che ha determinato quella forma canonica.

Risoluzione

Calcoliamo la matrice B della conica, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. $|B| = 32$. $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. $|A| = -16$.
Quindi la nostra conica è una iperbole. La sua forma canonica è del II) tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$.
Si calcolano gli autovalori della matrice A. Essi sono $\alpha = 8$ e $\beta = -2$. Dalle relazioni

$$\begin{cases} -\alpha\beta\gamma = 32 \\ \alpha\beta = -16 \end{cases}$$

si deduce che $\gamma = 2$. Calcolando gli autovettori associati agli autovalori si trova che sono $(1, -1)$ e $(1, 1)$; la matrice della rotazione è $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Il centro di simmetria si trova dal sistema $\begin{cases} 3x - 5y = 0 \\ -5x + 3y = 0 \end{cases}$ e quindi è l'origine delle coordinate O. In definitiva le formule del cambiamento di coordinate sono $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y) \end{cases}$