Corsi di laurea in **Ingegneria Civile, Gestionale**. Compito di **Geometria** assegnato il 10/07/02

Ia

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ associato alla matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 2 \\ 1 & h & h+1 \\ -1 & -h & -2 \end{pmatrix} \quad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

1) Studiare f al variare di h, determinando in ciascun caso $Im\, f$ e $Ker\, f$.
2) Calcolare, al variare di h, il sottoinsieme

$$T = \{v \in \mathbf{R}^3 \mid f(v) = (1,1,-1)\} \subseteq \mathbf{R}^3$$

Ib

Determinare il generico endomorfismo $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$\begin{cases} g(1,1,1) = (0,1,1) \\ g(0,1,1) = (1,1,1) \\ dim\, Im\, g = 2 \end{cases}$$

e verificare che gli endomorfismi trovati sono tutti semplici. Determinare una base di autovettori.

II

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u$.
1) Data la retta $\mathbf{r} : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$ determinare la retta $\mathbf{s}$ simmetrica di $\mathbf{r}$ rispetto ad O. Verificare che $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ sono complanari e determinare il piano che le contiene. Calcolare l'angolo $\widehat{\mathbf{rs}}$.
2) Studiare il fascio ϕ di coniche del piano $z = 0$ di equazione

$$x^2 + hy^2 - 2x + hy = 0$$

determinando in particolare i punti base e le coniche spezzate di ϕ.
3) Detta Γ l'iperbole equilatera di ϕ determinare il cilindro che ha Γ come direttrice e vertice $V \equiv (1, 0, -1, 0)$.

SVOLGIMENTO

Ia

1) Il determinante di $M(f)$ è

$$|M(f)| = -2h^2 - h - 1 - 2h + 2h + h^3 + h^2 + 2 = h^2(h-1) - (h-1) = (h-1)^2(h+1)$$

quindi si debbono discutere tre casi.
$h \neq \pm 1$ $\quad f$ è un isomorfismo.
$h = 1$ $\quad$ La matrice diviene

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Im\, f = \mathcal{L}(1,1,-1),\ Ker\, f = \{(x, -x-2z, z)\}$$

$h = -1$ La matrice diviene

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Im\, f = \mathcal{L}((1,-1,1),(1,0,-1))$$

e per trovare il nucleo risolviamo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Ker\, f = \{(x,x,0)\}$$

2) Dobbiamo risolvere il sistema lineare la cui matrice completa è

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 2 & 1 \\ 1 & h & h+1 & 1 \\ -1 & -h & -2 & -1 \end{array}\right)$$

della quale sappiamo che per $h \neq \pm 1$ ha rango 3. In questi casi il sistema ammette una sola soluzione e si può risolvere col teorema di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & h & h+1 \\ -1 & -h & -2 \end{vmatrix}}{(h-1)^2(h+1)} = \frac{(h-1)2}{(h-1)^2(h+1)} = \frac{1}{h+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} h & 1 & 2 \\ 1 & 1 & h+1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{(h-1)^2(h+1)} = \frac{(h-1)2}{(h-1)^2(h+1)} = \frac{1}{h+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ -1 & -h & -1 \end{vmatrix}}{(h-1)^2(h+1)} = 0$$

quindi $T = \{(\frac{1}{h+1}, \frac{1}{h+1}, 0)\}$.

$h = 1$ La matrice diviene

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \rho(A) = \rho(A \mid B) = 1$$

quindi il sistema ammette ∞^2 soluzioni, che si ottengono da

$$\{x + y + 2z = 1 \quad \Rightarrow \quad T = \{(x, 1 - x - 2z, z)\}$$

$h = -1$ La matrice diviene

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \rho(A) = 2 \\ \rho(A \mid B) = 3 \end{array}$$

quindi il sistema non è risolubile.

Ib

Poniamo $v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1)$ e completiamo questi vettori ad una base di $\mathbf{R}^3$, $\mathcal{A} = [v_1, v_2, e_3]$. Assegnarel'endomorfismo g equivale ad assegnare $g(e_3)$ nel modo più generale possibile. Per fare ciò osserviamo che in $Im\, f$ abbiamo già due vettori l.i., v_1 e v_2; quindi questi due vettori ne forniscono una base. Di conseguenza dovremo avere $g(e_3) \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$, e g è determinato dalle assegnazioni

$$\begin{cases} g(v_1) = v_2 \\ g(v_2) = v_1 \\ g(e_3) = av_1 + bv_2 \quad \text{con } a, b \in \mathbf{R},\ (a,b) \neq (0,0) \end{cases}$$

Quanto alla semplicità di g basta osservare che $g(v_1 + v_2) = v_1 + v_2$, cioè $v_1 + v_2$ è autovvettore rispetto all'autovalore 1; $g(v_1 - v_2) = -v_1 + v_2$, cioè $v_1 - v_2$ è autovvettore rispetto all'autovalore -1; infine il nucleo, che deve avere dimensione 1, è l'autospazio associato all'autovalore 0. Per determinare il nucleo osserviamo che

$$g(e_3) = ag(v_2) + bg(v_1) \quad \Rightarrow \quad g(e_3 - av_2 - bv_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ker\, f = \mathcal{L}(e_3 - av_2 - bv_1)$$

Un altro procedimento è quello di determinare una matrice associata a g e quindi usare i procedimenti standard. In questo caso conviene usare la base $\mathcal{A}$, e si ottiene

$$M^{\mathcal{A}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II

1) Ricordiamo che per ogni punto dello spazio, $P \equiv (a, b, c)$ il suo simmetrico rispetto all'origine è $P' \equiv (-a, -b, -c)$. Quindi, detto $R \in \mathbf{r}$ il punto generico, $R \equiv (1, \beta, \beta - 1)$, la retta $\mathbf{s}$ è descritta dal punto S simmetrico di R rispetto ad O, $S \equiv (-1, -\beta, 1 - \beta)$. Quindi possiamo ricavare le equazioni cartesiane di $\mathbf{s}$ dalle sue equazioni parametriche:

$$\mathbf{s} : \begin{cases} x = -1 \\ y = -\beta \\ z = 1 - \beta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s} : \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Naturalmente $\mathbf{s}$ deve giacere sul piano che passa per $\mathbf{r}$ e per O, che ha equazione $x - y + z = 0$. Infine, siccome le due rette sono parallele (basta trovare i loro punti impropri), esse formano l'angolo 0.

2) Calcoliamo il determinante della matrice B associata a ϕ:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & h & -\frac{h}{2} \\ -1 & -\frac{h}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |B| = -h - \frac{h^2}{4} = 0 \quad \begin{matrix} h = 0 \\ h = -4 \end{matrix}$$

$h = 0 \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-2) = 0$

$h = -4 \quad x^2 - 4y^2 - 2x + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 2y)(x - 2y - 2) = 0$

$h = \infty \quad y^2 + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(y+1) = 0$

Secando due di queste coniche spezzate si trovano facilmente i punti base del fascio: $A \equiv (0,0)$, $B \equiv (2,0)$, $C \equiv (2,-1)$, $D \equiv (0,-1)$.

Per le coniche irriducibili basta studiare il segno di $|A| = h$:

$h > 0$ ellissi. Per $h = 1$ si trova la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$.

$h < 0$ iperboli. Per $h = -1$ si trova l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 - 2x - y = 0$.
$h = 0$ spezzata. Non ci sono parabole.
3) Γ e la retta generica $\mathbf{t}$ per V hanno equazioni

$$\Gamma : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 - y^2 - 2x - y = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{t} : \begin{cases} x + z = h \\ y = k \end{cases}$$

secando $\mathbf{t}$ col piano di Γ si trova il punto $P \equiv (h, k, 0)$ ed imponendo che $P \in \Gamma$ si trova la condizione

$$h^2 - k^2 - 2h - k = 0$$

ed eliminando i parametri h e k (ricavandoli dalle equazioni di $\mathbf{t}$) si trova l'equazione del cilindro:

$$(x + z)^2 - y^2 - 2(x + z) - y = 0$$