Università di Catania – Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in **Ingegneria** **Elettronica**
Prova scritta di ***Geometria***, assegnata il 19 - 6 - 2002

Vecchio Ordinamento

È assegnato, nello spazio, un sistema di rif. cart. ortog. $\{ O ; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \mathrm{u} \}$.

I

1. – Determinare e studiare il fascio Φ di quadriche che :
contengono la conica riducibile $\begin{cases} x(x-2\sqrt{2}\,z) & = 0 \\ t & = 0 \end{cases}$
ed hanno come piano tangente in O il piano α : $z = 2x$.

2. – Siano:
$\mathcal{Q}$ il cilindro di Φ passante per $A \equiv (1,\ 0,\ \dfrac{1-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$ e π il piano $x-2y+z-4=0$.

- Determinare le equazioni della conica $\gamma = \mathcal{Q} \cap \pi$.
- Studiare la conica $\overline{\gamma}$ proiezione ortogonale di γ sul piano $y = 0$.

3. – Determinare una forma canonica della conica
$\overline{\gamma}$: $x^2 - 2\sqrt{2}\,x\,z - 2\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,z = 0$, $y = 0$
e le relative formule del cambiamento di coordinate.

Risoluzione

1.– Le quadriche contenenti la conica hanno equazione

$$t(ax+by+cz+dt) + x^2 - 2\sqrt{2}xz = 0$$

Perché passino per l'origine O, deve essere $d = 0$; il piano tangente nell'origine ha equazione $ax + by + cz = 0$ e perchè coincida col piano richiesto dev'essere $b = 0$, $a = -2c$. Si ottiene il fascio di quadriche di equazione:

$$x^2 - 2\sqrt{2}xz - 2cx + cz = 0$$

Scrivendo la matrice B della generica quadrica si ottiene

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & \frac{c}{2} \\ -c & 0 & \frac{c}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

È immediato verificare che per $c \neq 0$ la matrice B ha rango 3 e che $|A| = 0$, quindi si tratta sempre di cilindri iperbolici.

Per $c = 0$ si hanno quariche spezzate.

2.– Imponendo alla generica quadrica il passaggio per il punto A si ha:

$$-2c + c\frac{(1-2\sqrt{2})}{\sqrt{2}} + 1 - 2\sqrt{2}\frac{(1-2\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 0$$

Da cui facilmente
$$c = \frac{(\sqrt{2}-8)(1+4\sqrt{2})}{1-32}$$
Ed allora $c = \sqrt{2}$.
Il cilindro $\mathcal{Q}$ richiesto ha equazione
$$x^2 - 2\sqrt{2}xz - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}z = 0$$

• Le equazioni della conica $\gamma = \mathcal{Q} \cap \pi$ sono date dal sistema
$$\begin{cases} x^2 - 2\sqrt{2}xz - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}z = 0 \\ x - 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

• Dalla teoria è noto che, eliminando la y dal sistema, si ottiene il cilindro contenente γ con generatrici parallele all'asse delle $\vec{y}$. È ovvio che il risultato di tale eliminazione è dato dall'equazione della stessa quadrica $x^2 - 2\sqrt{2}xz - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}z = 0$, in quanto essa non dipende da y.
Quindi la proiezione di $\mathcal{Q}$ sul piano $y = 0$ è data dal sistema
$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2\sqrt{2}xz - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

3.– La matrice della conica è
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

È facile calcolare:
$$|B| = 2\sqrt{2} - 1; \qquad |A| = -2$$
La conica è una iperbole e quindi la sua equazione canonica è del tipo
$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$$

Troviamo gli autovalori α e β calcolando le radici del polinomio caratteristico
$$\begin{vmatrix} 1-T & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -T \end{vmatrix} = 0.$$

Si ha, per esempio, $\alpha = 2$ e $\beta = -1$. Tenendo conto che $|B|$ e $|A|$ sono invarianti ortogonali si calcola anche γ. Dal sistema $\begin{cases} -\alpha\beta\gamma = 2\sqrt{2} - 1 \\ \alpha\beta = -2 \end{cases}$ si deduce $\gamma = \frac{2\sqrt{2}-1}{2}$.

Una equazione canonica della nostra conica è $2X^2 - Y^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{2}$. Il centro di simmetria si trova dal sistema

$$\begin{cases} x - \sqrt{2}y = \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Si ottiene $C = (\frac{1}{2}, \frac{1-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}})$.

Si trovano poi autovettori associati agli autovalori $\alpha = 2$ e $\beta = -1$.

Dal sistema omogeneo $(A - 2I)\overline{X} = \overline{0}$ si trova l'autovettore $v_1 = (\sqrt{2}, -1)$, che noi normalizziamo dividendo per la sua norma, e che diventa $v_1' = (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Analogamente dal sistema $(A + 1I)\overline{X} = \overline{0}$ si trova l'autovettore normalizzato $v_2' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$.

In definitiva le formule del cambiamento di coordinate sono

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}X + \frac{1}{\sqrt{3}}Y + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}X + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}Y + \frac{1-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

II

1. – In $\mathbb{R}^3$ euclideo si studi l'endomorfismo f così definito:

$$\begin{cases} f(\,1,1,0\,) = (2,\ 1,\ h\,) \\ f(\,0,1,1\,) = (0, h+1, h+1) \qquad \text{con } h \in \mathbb{R}, \\ f(1,1,-1) = (2, 1-h, h-1) \end{cases}$$

determinando in ogni caso una base di $Im\, f$ e di $Ker\, f$

2. – Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3. – Nei casi in cui f non è un isomorfismo ed è semplice si determini una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

4. – Provare che , $\forall h \in \mathbb{R}$, f non conserva il prodotto scalare.

Risoluzione

1.– Intanto dalle relazioni date si può trovare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche. Si può scrivere

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) = (2, 1, h) \\ f(e_2) + f(e_3) = (0, h+1, h+1) \\ f(e_1) + f(e_2) - f(e_3) = (2, 1-h, h-1) \end{cases}$$

Si ottiene la matrice $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}$, in cui le colonne sono ordinatamente $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$.

A questo punto è facile trovare il rango della matrice. Si ha che il rango è 3 per $h \neq \pm 1$. In tal caso l'endomorfismo è un isomorfismo.

Per $h = 1$ si ha $dim Im(f) = 2$ e una base è data, per esempio, dalle prime due colonne della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il nucleo si trova dal sistema $\begin{cases} 2x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Quindi una base del nucleo può essere il vettore $v_1 = (0, 1, -1)$.

Analogamente si opera per trovare una base del nucleo e dell'immagine nel caso $h = -1$. Tralasciamo i dettagli.

2.–/3.– Troviamo gli autovalori dal polinomio caratteristico

$$\left| \begin{pmatrix} (2-T) & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & h \\ 0 & h & 1-T \end{pmatrix} \right| = 0$$

Si trovano gli autovalori: $T_1 = 2; T_2 = 1 + h; T_3 = 1 - h$.

Esaminiamo i vari casi:

a) $T_2 = T_3 = 1 \Rightarrow h = 0$. La matrice caratteristica per $h = 0$ e $T_1 = T_2 = 1$ diventa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 1 e quindi la dimensione dell'autospazio V_1 è 2. L'endomorfismo è semplice, ed f è un isomorfismo.

b) $T_1 = T_2 = 2 \Rightarrow h = -1$. In tal caso l'endomorfismo non è un isomorfismo perchè il rango della matrice non è massimo. La matrice caratteristica in tal caso diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e l'endomorfismo è semplice perchè la dimensione dell'autospazio è due.

c) Infine per $T_1 = T_3 = 2 \Rightarrow h = 1$. Anche in tal caso l'endomorfismo è semplice. Anzi è facile trovare una base ortonormale di autovettori. Usando le solite regole si trovano gli autovettori:

$$v_1 = (1, 0, 0); \quad v_2 = (0, 1, 1); \quad v_3 = (0, 1, -1$$

Essi si possono normalizzare dividendo ciascuno per la sua norma.

4.– La matrice associata ad f, rispetto alla base canonica è $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}$ e non è ortogonale. Ne segue che l'endomorfismo ad essa associato non conserva il prodotto scalare.